1. Valós analízis gyakorlat, 2016. szeptember 19.

Osztályozás: gyakorlati jegy $\approx \dfrac{2 \cdot Z_1 + 2 \cdot Z_2 + \overline{R} + P}{5} \pm M$, ahol Z_1 és Z_2 a két ZH pontszám, $\overline{R}$ a 5–15 röpdolgozat átlaga a két legrosszabb nélkül, P a megszerzett Pedál Medál Pirospontok száma, M az órai munka (a.k.a. pofafaktor). Javítási lehetőség: a pót ZH-n (várható időpont: december 19.).

A gyakorlatokon való részvétel kötelező. Ha valaki a gyakorlatok negyedénél többről hiányzik, akkor csak rendkívüli, igazolt esetben, többletfeladatok teljesítése után kaphat gyakorlati jegyet. Ha valaki a gyakorlatoknak több mint a harmadánál többről hiányzik, akkor egyáltalán nem kaphat gyakorlati jegyet.

Bővebb tájékoztató az intenzív gyakorlatokról:
http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-an3/Tajekoztato.html

1.1. Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Mely intervalumokon egyenletesen konvergensek?

$$\sqrt[n]{|x|} \qquad \frac{x^n}{n!} \qquad x^n - x^{2n} \qquad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

1.2. Igaz-e, hogy
(a) monoton függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze monoton?
(b) szigorúan monoton függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze szigorúan monoton?
(c) korlátos függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze korlátos?
(d) folytonos függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze folytonos?
(e) Lipschitz függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze Lipschitz?

1.3. Igaz-e, hogy
(a) monoton függvényekből álló sorozat egyenletes limesze monoton?
(b) szigorúan monoton függvényekből álló sorozat egyenletes limesze szigorúan monoton?
(c) korlátos függvényekből álló sorozat egyenletes limesze korlátos?
(d) folytonos függvényekből álló sorozat egyenletes limesze folytonos?
(e) Lipschitz függvényekből álló sorozat egyenletes limesze Lipschitz?

1.4. Igazoljuk, hogy egyenletesen korlátos függvénysorozat pontonkénti limesze korlátos.

1.5. Bizonyítsuk be, hogy $\zeta(s)$ akárhányszor differenciálható az $(1, \infty)$ intervalumban.

1.6. Igaz-e, hogy ha a folytonos $[a, b] \to \mathbb{R}$ függvényekből álló (f_n) sorozat egyenletesen konvergens az $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ halmazon, akkor a teljes intervallumon egyenletesen konvergens?

1.7.

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots = ? \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1} = ?$$

1.8. Legyen $c_0 = 1$ és $c_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$. (Ezeket hívják Catalan-számoknak.) Definiáljuk a $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ „generátorfüggvényt”.
(a) Bizonyítsd be, hogy a G-t definiáló hatványsor konvergens a 0 egy környezetében.
(b) Igazold, hogy a konvergenciaintervallum belsejében $G(x) = xG^2(x) + 1$.
(c) Számítsd ki és fejtsd hatványsorba G-t, és számítsd ki c_n-et.

Házi feladatok

1.9. Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Mely intervalumokon egyenletesen konvergensek?

$$\frac{x^n}{1+x^n} \qquad \sqrt[n]{1+x^{2n}} \qquad \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$$

1.10. Igaz-e, hogy
(a) konvex függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze konvex?
(b) szigorúan konkáv függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze szigorúan konkáv?
(c) integrálható függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze integrálható?
(d) differenciálható függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze differenciálható?

1.11. Igaz-e, hogy
(a) konvex függvényekből álló sorozat egyenletes limesze konvex?
(b) szigorúan konkáv függvényekből álló sorozat egyenletes limesze szigorúan konkáv?
(c) integrálható függvényekből álló sorozat egyenletes limesze integrálható?
(d) differenciálható függvényekből álló sorozat egyenletes limesze differenciálható?

1.12. Igazoljuk, hogy ha az (f_n) függvénysorozat a H halmaz minden megszámlálható részén egyenletesen konvergens, akkor H-n is egyenletesen konvergens.

1.13. Az $f_1, f_2, \ldots : I \to \mathbb{R}$ függvénysorozat *egyenletesen Lipschitz*, ha $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x, y \in I\ |f_n(x) - f_n(y)| \le K|x-y|$. Igazoljuk, hogy egyenletesen Lipschitz függvénysorozat pontonkénti limesze Lipschitz.

1.14. Igazoljuk, hogy ha az $f_1, f_2, \ldots : I \to \mathbb{R}$ függvénysorozat egyenletesen korlátos és egyenletesen Lipschitz az I korlátos zárt intervallumon, akkor létezik egyenletesen konvergens részsorozata.

1.15.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+2}\right) =?$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM1 Legyen p_n az n szám olyan partícióinak száma, amiben a tagok különbözők. (Megengedjük az egytagú, sőt az üres összeget is. Pl. $p_0 = 1$ és $p_6 = 4$, mert $6 = 5+1 = 4+2 = 3+2+1$.) A $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ generátorfüggvény segítségével keress felső becslést p_n-re.

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-an3/`
További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`