5. Valós analízis gyakorlat, 2016. október 18.

5.1. Igazoljuk, hogy az $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 + x_2 + \dots + x_n$ függvény differenciálható. Mi a deriváltja? Keressünk ε-hoz δ-t!

5.2. Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto x/y$ függvény differenciálható ($y \neq 0$). Mi a deriváltja?

5.3. Igazoljuk, hogy az n-dimenziós vektorok skaláris szorzása, mint $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható. Mi a deriváltja?

5.4. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ differenciálható az a pontban, $f(a) = 0$, és $f'(a) = 0$, akkor minden korlátos $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényre gf is differenciálható a-ban.

5.5. Írjuk fel az $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ függvény grafikonját az $(1, 2, 3, 14)$ pontban érintő sík egyenletét.

5.6. Igazoljuk, hogy az $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$ függvény az origóban minden irányban differenciálható. Létezik-e olyan a vektor, amire tetszőleges v egységvektor esetén $D_v f(0, 0) = a \cdot v$?

5.7. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény D_1D_2f második parciális deriváltja mindenhol létezik, és sehol sem negatív. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a < b$, $c < d$ számokra $f(a, c) + f(b, d) \geq f(a, d) + f(b, c)$.

5.8. Bizonyítsuk be, hogy ha D_1D_2f és D_2D_1f is létezik az (a, b) pont egy környezetében, és mindkettő folytonos (a, b)-ben, akkor $D_1D_2f(a, b) = D_2D_1f(a, b)$.

Házi feladatok

5.9. Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto x^y$ függvény ($y > 0$) folytonosan differenciálható. Mi a deriváltja?

5.10. Legyen M valós $q\times r$-es mátrix. Mi az $f(x_1, \dots, x_{q+r}) = (x_1, \dots, x_q)M(x_{q+1}, \dots, x_{q+r})^T$ bilineáris forma deriváltja?

5.11. Mi a $\mathrm{tr} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ függvény deriváltja?

5.12. Konstruáljunk olyan $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amelynek az origóban minden iránymenti deriváltja 0, és

(a) nem differenciálható az origóban;
(b) nem folytonos az origóban;
(c) nem is korlátos az origó egyetlen környezetében sem.

5.13. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény D_1D_2f második parciális deriváltja mindenhol létezik. Mutassuk meg, hogy ha tetszőleges $a < b$, $c < d$ számokra $f(a, c) + f(b, d) \geq f(a, d) + f(b, c)$, akkor D_1D_2f sehol sem negatív.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM5. Egy $(\mathbf{p}_i)_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^3$ pontsorozatra gömbfelületet szeretnénk illeszteni. A gömb egyenletét $f(\mathbf{x}) = a|\mathbf{x}|^2 + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle + c = 0$ alakban írjuk fel, és olyan együtthatókat keresünk, amelyekre

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(\mathbf{p}_i)\big)^2 = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b}^t & c \end{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}_i|^2 \\ \mathbf{p}_i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}_i|^2 & \mathbf{p}_i^t & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ \mathbf{b} \\ c \end{pmatrix}$$

minimális az egyenlet valamilyen normalizálása mellett, például

(a) $a = 1$; vagy (b) $|\mathbf{b}|^2 + 4ac = 1$.

Magyarázzuk meg, hogy a (b) módszer miért ad jobb eredményt, mint az (a) módszer.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu