6. Valós analízis gyakorlat, 2016. október 25.

6.1. Írjuk fel a következő leképezések Jacobi-mátrixát.

$$f(x,y) = \big(x+y, xy, \cos(x+y)\big); \quad g(x,y) = \big(e^{x+y}, xy\big)$$

6.2. Igazoljuk, hogy a vektorok vektoriális szorzása, mint $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ függvény, differenciálható. Mi a Jacobi-mátrixa az $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ pontban?

6.3. Írjuk fel az xyz függvény második Taylor-polinomját az $(1,2,3)$ pontban.

6.4. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékhelyeit:

$$x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 5; \qquad x^3y^2(2-x-y)$$

6.5. Igazoljuk, hogy ha $f_1, ..., f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható konvex fügvények, akkor a $g(x_1, \ldots, x_p) = f_1(x_1) + \ldots + f_p(x_p)$ függvény is konvex. Ellenőrizzük, hogy a d^2g kvadratikus alak mindenhol pozitív szemidefinit.

6.6. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. A Lagrange-középértéktételből vezessük le, hogy ha ha tetszőleges pontban

$$\langle f'(x,y,z), (x,y,z)\rangle \geq 0,$$

akkor f-nek abszolút minimuma van az origóban, és

$$D_{11}f(0,0,0) + D_{22}f(0,0,0) + D_{33}f(0,0,0) \geq 0.$$

6.7. Legyen $f(x,y) = g(x)h(y)$, ahol a $g(x)$ és $h(y)$ függvények n-szer differenciálhatók az a, illetve a b pontban. A $g(x)$ n-edik Taylor polinomja az a pontban legyen $c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n$, a $h(y)$ n-edik Taylor polinomja a b pontban pedig $d_0 + d_1(y-b) + \ldots + d_n(y-b)^n$. Mi az f függvény (a,b)-beli, n-edik Taylor-polinomja?

Házi feladatok

6.8. Írd fel a következő leképezések Jacobi-mátrixát.

$$f(x,y) = \big(\sin x, \cos y\big); \quad g(x,y) = \big(\log x, x^2+y^2\big); \quad h = f \circ g.$$

6.9. Írjuk fel a $\sin(x+y)$ függvény harmadik Taylor-polinomját a $(0,0)$ pontban.

6.10. Hol van az $x^3 - 3x + xy - xz + y^2 + z^2$ fügvénynek lokális minimuma, illetve maximuma?

6.11. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

$$x^3 + y^3 - 9xy; \qquad \sin x + \sin y + \sin(x+y)$$

6.12. Igazoljuk, hogy minden $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$-re $\|A\| \geq |\det A|^{1/p}$.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM6.1. Igazoljuk, hogy ha $H \subset \mathbb{R}^p$ konvex és nyílt, és $f : H \to \mathbb{R}$ konvex, akkor f a H minden kompakt részén Lipschitz.

PM6.2. Adott egy $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható konvex függvény. Az F minimumát a *konjugált gradiens módszerrel* keressük: veszünk egy x_0-t, majd legyen

$$x_{n+1} = x_n - c(x_n) \cdot \mathrm{grad} f(x_n),$$

ahol a $c(x_n)$ számot az f függvény x_n-beli első és második deriváltjából számítjuk.

(a) Mi legyen $c(x_n)$?
(b) Igazoljuk, hogy a módszer működik másodfokú polinomokra.
(c) Keressünk más elégséges feltételt a módszer működésére.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu