8. Valós analízis gyakorlat, 2016. november 15.

8.1. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : H \to \mathbb{R}^p$ kétszer differenciálható, $a \in H$, $b = f(a)$, és tegyük fel, hogy $f'(a)$ invertálható. Tudjuk, hogy f-nek létezik lokális inverze a b pont egy környezetében; legyen ez a lokális inverz függvény g. Igazoljuk, hogy g kétszer differenciálható b egy környezetében. Írjuk fel $g''(b)$-t $f'(a)$ és $f''(a)$ segítségével.

8.2. Legyen $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$ esetén $u(x, y, z)$ az

$$(2 + x)U^3 + (1 + y)U - (3 + z)$$

polinom valós gyöke. Igazoljuk, hogy u differenciálható. $u'(0, 0, 0) =$?

8.3. Határozzuk meg $x - y + 3z$ legnagyobb és legkisebb értékét az $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$ ellipszoidon.

8.4. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ feltételek mellett $x + y + z$ legnagyobb lehetséges értékeit.

8.5. Ellenőrizzük a mértani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget a Lagrange-multiplikátor módszerrel.

8.6. Legyen M szimmetrikus $n \times n$-es mátrix.

(a) Mely v egységvektorok esetén lesz $v^t M v$ minimális, illetve maximális?

(b) Melyik a leghosszabb, illetve a legrövidebb azon v vektorok közül, amikre $v^t M v = 1$?

8.7. Adottak a térben a $p_1, \ldots, p_n$ pontok. Tekintsük azt az origón átmenő síkot, amire a pontok és a sík távolságainak négyzetösszege minimális. Legyen a sík normálvektora v, ahol $|v| = 1$.

(a) Igazold, hogy v sajátvektora a $\sum_{i=1}^{n} p_i p_i^t$ mátrixnak.

(b) Mi a geometriai jelentése a v-hez tartozó sajátértéknek?

Házi feladatok

8.8. Legyen $|x_1 - 10| < 1$, $|x_2 - 20| < 1$, $|x_3 - 30| < 1$ esetén $u = (u_1, u_2)$ az

$$U_1 + U_2 = x_1 + x_2 + x_3 - 10, \quad U_1 U_2 = \frac{x_1 x_2 x_3}{10}$$

egyenletrendszernek a $(30, 20)$ ponthoz közelebbi megoldása. $u'(10, 20, 30) =$?

8.9. Határozzuk meg xyz legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ feltételek mellett.

8.10. Határozd meg az $xy = 4$ hiperbola és az $(5, 5)$ pont távolságát a Lagrange-multiplikátor módszerrel.

8.11. Legyen A és B két $n \times n$-es valós szimmetrikus mátrix, $\det A \neq 0$.

(a) Bizonyítsd be, hogy ha $x_0 \in \mathbb{R}^n$ feltételes lokális szélsőértékhelye az $x \to x^t B x$ függvénynek az $x^t A x = 1$ feltétel mellett, akkor x_0 sajátvektora az $A^{-1}B$ mátrixnak.

(b) Mi a jelentése az x_0 sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM8.1. Legyen $H \subset \mathbb{R}^{p+1}$, $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in \operatorname{int} H$ és $f : H \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az (a, b) pontban, továbbá tegyük fel, hogy $f(a, b) = 0$ és $D_{p+1} f(a, b) \neq 0$. Igazoljuk, hogy az $f(x, \varphi(x)) = 0$ ($\varphi(a) = b$) egyenlettel megadott φ implicit függvény kétszer differenciálható az a pontban, és írjuk fel a második deriváltját.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-an3/

További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu