9. Valós analízis gyakorlat, 2016. november 22.

14:05–16:30, D-3-306

9.1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $0 \le a \le b$ valós számokhoz létezik olyan $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz, amire $b(H) = a$ és $k(H) = b$.

9.2. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz. Igazak-e a következő állítások? (Bizonyítsuk be, vagy mutassunk ellenpéldát.)

(a) Ha $k(H) = 0$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(b) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\partial H \in \mathcal{J}$.
(c) Ha $\partial H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(d) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$.
(e) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$.
(f) Ha $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$, és $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$.

9.3. Legyen $A, B \subset \mathbb{R}^p$ két diszjunkt, korlátos halmaz. Rakjuk sorba nagyság szerint a következő mennyiségeket:

$$k(A \cup B); \qquad b(A \cup B); \qquad k(A) + k(B); \qquad b(A) + b(B); \qquad k(A) + b(B); \qquad b(A) + k(B).$$

9.4. Igazoljuk, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$, és $\operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B$ nullmértékű, akkor $k(A \cup B) = k(A) + k(B)$.

9.5. Legyen $A \subset [a, b]$ Jordan-mérhető $\mathbb{R}$-ben. Kössük össze A minden pontját egy adott síkbeli ponttal. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott szakaszok uniója Jordan-mérhető a síkban. Mennyi a területe?

9.6. (a) Igazoljuk, hogy a Cantor-halmaz nullmértékű. (A Cantor-halmaz azokból a $[0, 1]$-beli pontokból áll, amelyeknek van olyan, 3-as számrendszerbeli felírása, ami nem tartalmaz 1-es számjegyet.

(b) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$-ben tetszőleges $0 \le c \le d < \infty$-hez létezik olyan kompakt halmaz, aminek belső mértéke c, külső mértéke d.

9.7. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset B \subset \mathbb{R}^p$ és B Jordan-mérhető, akkor

$$t(B) = k(A) + b(B \setminus A).$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy egy $A \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha bármely $B \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmazra

$$k(B) = k(B \cap A) + k(B \setminus A).$$

9.8. Legyen $\mathcal{R}$ halmazgyűrű és $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ szubadditív halmazfüggvény, amire $\mu(\emptyset) = 0$ is teljesül. Nevezzünk egy $A \in \mathcal{R}$ halmazt μ-mérhetőnek, ha bármely $B \in \mathcal{R}$ esetén $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$. Bizonyítsuk be, hogy a μ-mérhető halmazok $\mathcal{R}$-nek egy részgyűrűjét alkotják, és ezen a részgyűrűn μ additív, azaz tetszőleges A, B diszjunkt, μ-mérhető halmazokra $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Házi feladatok

9.9. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz. Igazak-e a következő állítások?
(a) Ha $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(b) Ha H zárt, és $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$.
(c) Ha H nyílt, és $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$.
(d) Ha $k(\operatorname{int} H) = b(\operatorname{cl} H)$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(e) $\partial H \in \mathcal{J}$.

9.10. Legyenek $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ korlátos halmazok. Igazak-e a következő állítások?
(a) $k^{(p+q)}(A \times B) = k^{(p)}(A) \cdot k^{(q)}(B)$?
(b) $b^{(p+q)}(A \times B) = b^{(p)}(A) \cdot b^{(q)}(B)$?
(c) Ha A és B mérhető, akkor $A \times B$ is mérhető, és $t^{(p+q)}(A \times B) = t^{(p)}(A) \cdot t^{(q)}(B)$?

9.11. Igazold, hogy a Sierpinski-szőnyeg nullmértékű. (A Sierpinski-szőnyeg azokból az $((x, y) \in [0, 1]^2$ pontokból áll, amikre x-nek és y-nak van olyan, 3-as számrendszerbeli $x = 0,x_1x_2\ldots$, illetve $y = 0,y_1y_2\ldots$ felírása, hogy bármely i indexre $x_i \neq 1$ vagy $y_i \neq 1$.

9.12. Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ Jordan-mérhető halmazok az egységkockában, és tegyük fel, hogy a mértékeik összege nagyobb, mint m. Bizonyítsd be, hogy van olyan nyílt gömb, amely a halmazok közül több, mint m-nek részhalmaza.

9.13. Bizonyítsd be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz, akkor $A + B(0, 1) = \{a + b : a \in A, |b| < 1\}$ Jordan-mérhető.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM9.1. Létezik-e differenciálható Peano-görbe? (Azaz, olyan $[0, 1] \to \mathbb{R}^2$ differenciálható leképezés, amelynek értékkészlete tartalmazza $[0, 1]^2$-et.)

PM9.2. Tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz esetén legyen $B(H)$ az (egyik) legnagyobb nyílt gömb, ami H-nak részhalmaza; ha H belseje üres, akkor legyen $B(H) = \emptyset$. Egy $A_0 \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető halmazból kiindulva képezzük az $A_1, A_2, \ldots$ halmazsorozatot az $A_{n+1} = A_n \setminus B(A_n)$ rekurzióval. Igazold, hogy $t(A_n) \to 0$.

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-an3/`
További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`