10. Valós analízis gyakorlat, 2016. november 29.
14:05–16:30, D-3-306

Emlékeztetőül, második ZH: dec. 12, 14-16 (előadás helyett)

10.1. Cseréljük fel (helyesen :-)) az integrálások sorrendjét!

$$\int_0^1 \int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x; \qquad \int_{-1}^1 \int_{|x|}^{x^2+x+1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

10.2.

$$\int_0^1 \int_0^x y^2 e^x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^{\pi/2} \left(\int_x^{\pi/2} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = ?$$

10.3. Egy háromszög csúcsai $A=(a,0)$, $B=(b,0)$ és $C=(0,m)$. Legyen tetszőleges $(x,y)\in[0,1]^2$-re

$$f(x,y) = (1-x)(1-y)\cdot A + x(1-y)\cdot B + y\cdot C.$$

Számítsuk ki a háromszög területét mértéktranszformációval.

10.4. Mekkora egy homogén sűrűségeloszlású, tömör kocka tehetetlenségi nyomatéka valamelyik lap tengelye körül?

10.5. Számítsuk ki a $\beta - 90^\circ \le \varphi \le 90^\circ - \gamma$, $0 \le r \le \dfrac{m}{\cos\varphi}$ halmaz területét.

10.6. Mekkora egy homogén sűrűségeloszlású, tömör kúp tehetetlenségi nyomatéka a tengelye körül, ha a tömege m, az alapkörének sugara r, a magassága pedig h?

10.7. Bizonyítsuk be, hogy ha $f>0$ a pozitív Jordan-mértékű $A\subset\mathbb{R}^n$ halmazon, akkor $\overline{\int}_A f\,dx > 0$.

10.8. Igaz-e, hogy ha egy $[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ függvény minden vízszintes és minden függőleges szakaszon monoton, akkor integrálható?

Házi feladatok

10.9.

$$\int_0^1 \left(\int_{y^{2/3}}^1 y\cos x^2\,dx \right) dy = ? \qquad \int_0^1 \sqrt{x} \left(\int_{x^{3/4}}^1 e^{y^3}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = ?$$

10.10. Hol van az $0\le r<1-\cos\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$ halmaz súlypontja?

10.11. Számítsd ki az $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1,\ |z|\le e^{\sqrt{x^2+y^2}}\}$ halmaz Jordan-térfogatát.

10.12. Igazold, hogy ha $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\int_0^1 \int_0^1 f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 f(t)\log\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

10.13. Bizonyítsd be Steiner tételét: ha egy merev test tömege m, és a tehetetlenségi nyomatéka egy, a súlypontján átmenő tengely körül Θ_0, akkor egy vele párhuzamos, r távolságra levő tengely körül a tehetetlenségi nyomaték $\Theta_0 + mr^2$.

10.14. Egy számítógépes kísérlethez független, normális eloszlású (ál)véletlen számokra van szükségünk. A rendelkezésünkre álló véletlenszám-generátor egyenletes eloszlású, független véletlen számokat biztosít. Hogyan készíthetünk két független, $(0,1)$-beli egyenletes eloszlású véletlen számból két független, normális eloszlású véletlen számot? (A normális eloszlás sűrűségfüggvénye $\varrho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.)

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM10.1. Minden folytonos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre legyen $J_0 f = f$, és $a\ge 0$ esetén legyen $J_a f$ az a függvény, amire

$$(J_a f)(x) = \int_0^x f(t)\frac{(x-y)^{a-1}}{\Gamma(a)}\,\mathrm{d}x.$$

Igazoljuk, hogy (a) $(J_1 f)(x) = \int_0^x f$; (b) $J_{a+1} = J_1 J_a$; (c) $J_{a+1} = J_a J_1$; (d) $J_{a+b} = J_a J_b$.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu