Valós analízis ZH, 2016. december 12.

Minden beadott lapra írd rá a nevedet.

Törekedj a rendezett, áttekinthető, világos, jól olvasható leírásra. Csak arra adok pontot, *amit nagyító nélkül is el tudok olvasni*.

A feladatok nem, vagy nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek. A feladatokat tetszőleges sorrendben kidolgozhatod.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

Végeredmény közlése önmagában nem elegendő (0 pont), megfelelő indoklás szükséges.

Semmilyen segédeszköz sem használható, **számológép sem**.

1. Határozd meg xyz legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ feltételek mellett.

2.

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1 + x^3}\, dx \right) dy = ?$$

3. Mekkora az r sugarú, m tömegű homogén gömb tehetetlenségi nyomatéka a középpontján átmenő tengely körül?

4. Legyen $|x| < 1$ esetén $u(x)$ az

$$(2 + x)u^5 + (1 + x)u - (3 + x)$$

polinom egyetlen valós gyöke. $u''(0) = ?$

5. Legyen $a \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \cos(ax)\, \mathrm{d}x = ?$

6. A differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre

$$y^2 \cdot D_1 f(x, y) + x^3 \cdot D_2 f(x, y) = 0.$$

Bizonyítsd be, hogy $f(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) = f(0, 0)$.

7. Bizonyítsd be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^3$ korlátos halmaz, akkor az

$$A + [-1, 1]^3 = \{a + b :\ a \in A,\ |b_1| \le 1,\ |b_2| \le 1,\ |b_3| \le 1\}$$

halmaz Jordan-mérhető.