3. Komplex függvénytan gyakorlat, 2016. október 5.

3.1. Az f függvény holomorf egy 0 középpontú, $r+\varepsilon$ sugarú körben. Igazoljuk, hogy a 0 körüli, r sugarú körön $f(z)$ átlaga $f(0)$. (Gondoljuk meg hatványsorral és közvetlenül a Cauchy-formulával is.)

3.2. Legyen $f(z)$ olyan egészfüggvény, amire $|f(z)| \le e^{|z|}$, és legyen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a függvény 0 körüli hatványsora. Igazoljuk, hogy $|a_n| \le \left(\frac{e}{n}\right)^n$. (Mekkora körre érdemes felírni az együtthatóbecslést?)

3.3. A Liouville-tételből vezessük le, hogy ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor (a) a valós része nem lehet korlátos sem alulról, sem felülről; (b) az értékkészlete sűrű; (c) minden egyenes szakaszon van értéke. (Az utóbbihoz használjuk a Zsukovszkij-függvényt.)

3.4. Mutassunk olyan nem azonosan 0 függvényt, ami reguláris az egységkör belsejében, és ott végtelen sok gyöke van. Miért nem mond ez ellent az unicitás-tételnek?

3.5. Az $f(z)$, $\overline{f(\bar{z})}$ és $\overline{f(-\bar{z})}$ függvények összehasonlításával igazoljuk, hogy ha az f egészfüggvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény.

3.6. Az f függvény reguláris az $1-\varepsilon < |z| < 1+\varepsilon$ körgyűrűn, és f értéke az egységkörvonal végtelen sok pontjában valós. Bizonyítsuk be, hogy f a teljes körvonalon valós. (Tükrözzünk a körvonalra.)

3.7. (a) Az f egészfüggvényre tetszőleges n pozitív egész esetén $\operatorname{Re} f(1/n) = 1/n^2$. Mi lehet $\operatorname{Re} f(-1)$?

(b) Az f egészfüggvényre $\arg f(1/n) \equiv \frac{\pi}{n^2} \pmod{2\pi}$, ha $n = 1, 2, \ldots$. Mi lehet $\arg f(2)$?

3.8. A maximum-elv felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény reguláris és nem konstans egy nyílt halmazon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke.

Házi feladatok

3.9. A Liouville-tétel segítségével igazold, hogy ha f kétszeresen periodikus egész függvény (azaz $f(z+a) = f(z)$, $f(z+b) = f(z)$, és az a, b periódusok nem egy közös c periódus egész számú többszörösei), akkor f konstans.

3.10. Bizonyítsuk be, hogy ha f $2\pi i$ szerint periodikus egészfüggvény, amire $|f(z)| \le e^{\frac{9}{10}|z|}$, akkor f konstans.

3.11. Az f függvény reguláris az $1 < |z| < 2$ tartományon, és az $[1, 2]$ szakaszon csak valós értékeket vesz fel. Mutassuk meg, hogy a $[-1, -2]$ szakaszon is csak valós értékei vannak.

Miért nem működik a megoldás az $1 < |z| < 2$, $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$ tartománnyal?

3.12. Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)| = 1/n^2$, ha $n = 1, 2, \ldots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$?

3.13. Az f függvény reguláris az $|z| < 1+\varepsilon$ körlemezen. Legyen $A = \max_{0 \le t \le \pi} |f(e^{it})|$ és $B = \max_{\pi \le t \le 2\pi} |f(e^{it})|$. Bizonyítsuk be, hogy $|f(0)| \le \sqrt{AB}$.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM3.1 Legyen $0 < r_1 < r_2 < r_3$.

Bizonyítsd be, hogy ha az $f(z)$ függvény reguláris az $r_1 < |z| < r_3$ tartományon, és folytonos a határán, akkor

$$\left(\max_{|z|=r_2} |f(z)|\right)^{\log(r_3/r_1)} \le \left(\max_{|z|=r_1} |f(z)|\right)^{\log(r_3/r_2)} \cdot \left(\max_{|z|=r_3} |f(z)|\right)^{\log(r_2/r_1)}.$$

(Hadamard-féle három kör tétel)

PM3.2. Az f egészfüggvényt *érdekesnek* nevezzük, ha $f(z)$ értéke tisztán valós a $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2$ parabola pontjaiban.

(b) Bizonyítsd be, hogy minden f érdekes függvényre teljesül, hogy $f'(-3/4) = 0$.

(a) Mutass példát nemkonstans érdekes függvényre.

CIIM 2014, Costa Rica

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-kft/`

További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`