4. Komplex függvénytan gyakorlat, 2016. október 12.

4.1. Legyen $f(z)$ egészfüggvény, és tegyük fel, hogy

$$f(z+2) - 2f(z+1) + f(z) \equiv f(z+2i) - 2f(z+i) + f(z) \equiv 0,$$

avagy $\Delta_1^2 f = \Delta_i^2 f = 0$.

(a) Becsüljük meg felülről $|f(z)|$ nagyságrendjét.

(b) Mutassuk meg, hogy f lineáris függvény.

4.2. Fejtsük Laurent-sorba a $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+1)}$ függvényt az $1 < |z-1| < 2$ tartományon. Számítsuk ki az együtthatókat az együtthatóformulából is.

4.3. Tegyük fel, hogy $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ az $1-\varepsilon < |z| < 1+\varepsilon$ körgyűrűn. Fejezzük ki

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left|f(z)\right|^2 |\,\mathrm{d}z|$$

értékét az együtthatókkal.

4.4. Igazoljuk, hogy ha f-nek a-ban izolált szingularitása van, és vannak olyan $z_n \to a$ és $w_n \to a$ sorozatok, hogy $f(z_n) \to 1$, $f(w_n) \to 2$, akkor van olyan $s_n \to a$ sorozat is, hogy $f(s_n) \to 3$.

4.5. Tegyük fel, hogy f-nek m-edrendű pólusa van a-ban, és p egy n-edfokú polinom. Mutassuk meg, hogy $p\left(f(z)\right)$ függvénynek mn-edrendű pólusa van a-ban.

4.6. Legyen $D_1 = \{z : r < |z| < R\}$ és $D_2 = \{z : |z| < R\}$, ahol $0 < r < R$ valós számok.

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f : D_1 \to \mathbb{C}$ holomorf függvényre a következő állítások ekvivalensek:

(1) f analitikusan folytatható D_2-re;

(2) f-nek létezik akárhányszoros primitív függvénye;

(3) Bármely $g : D_2 \to \mathbb{C}$ holomorf függvényre az fg függvénynek létezik primitív függvénye D_1-en.

4.7. Lehet-e az f függvény izolált szingularitása e^f-nek pólusa?

Házi feladatok

4.8. Fejtsd Laurent-sorba a $\dfrac{z^3+2}{z(z+1)}$ függvényt az 1 körül, az $1 < |z-1| < 2$ halmazon.

4.9. Igazold, hogy ha az $f(z)$ függvény reguláris az a pont egy pontozott környezetében, és ott $f|(z)| > 1$, akkor a megszüntethető szingularitás vagy pólus.

4.10. Igazold, hogy ha f holomorf az $\frac{9}{10} < |z| < \frac{11}{10}$ halmazon, akkor

$$\int_{|z|=1} \left|f'(z)\right|^2 |\,\mathrm{d}z| \le \int_{|z|=1} \left|f(z)\right|^2 |\,\mathrm{d}z| + \int_{|z|=1} \left|f''(z)\right|^2 |\,\mathrm{d}z|.$$

4.11. Bizonyítsd be (a nagy Picard-tétel felhasználása nélkül), hogy ha az f függvénynek lényeges szingularitása van az a pontban, akkor tetszőleges $r > 0$-ra $f\big(\dot{B}(a,r)\big)$ metsz minden egyenes szakaszt. (Elég a $[-1,1]$ szakaszra.)

4.12. Legyen $S(z) = z \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$. Igazoljuk, hogy

(a) ez a végtelen szorzat a teljes komplex számsíkon konvergens, és a szorzatfüggvény reguláris;

(b) $S(z+\pi) = -S(z)$;

(c) ha a komplex számsíkból a π minden többszörösének elhagyjuk egy egységnyi sugarú környezetét, akkor a megmaradt tartományon az $1/S(z)$ függvény korlátos;

(d) az $\frac{1}{S(z)} - \frac{1}{\sin z}$ függvény korlátos, és csak megszüntethető szingularitásai vannak;

(e) $S(z) = \sin z$.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM4. Legyen a komplex szám.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \log|z-a| \,|\,\mathrm{d}z| = ?$$

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-kft/`

További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`