6. Komplex függvénytan gyakorlat, 2016. október 26.

6.1. Mutassuk meg, hogy egy elliptikus (két irányban periodikus), nem konstans meromorf függvény a fundamentális paralelogrammán minden értéket és a ∞-t is ugyanannyiszor, de legalább kétszer vesz fel.

6.2. Egy $p(z)$ polinom gyökei az egységkör belsejébe esnek. Írjunk fel olyan, a körvonalon vett vonalintegrált, ami megadja a gyökök összegét multiplicitással. Hasonlítsuk össze az eredményt a megfelelő Viéte-formulával.

6.3. Hány gyöke van a $2^z + 3z^2 - z$ függvénynek az egységkörben?

6.4. Hány gyöke van (multiplicitással számolva) az

$$\frac{10z+5}{z+2} = 4z^3$$

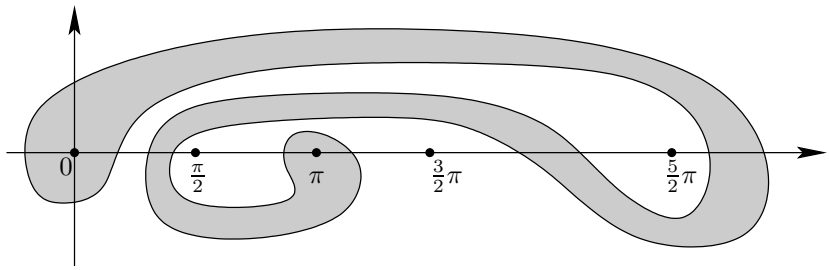
egyenletnek az $1 < |z| < 3$ tartományon?

6.5. Gondoljuk meg, hogy

(a) A $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^s}$ függvény holomorf a $\operatorname{Re} s > 1$ félsíkban;

(b) Az $\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} \right)$ képlet kiterjeszti a ζ-függvényt a jobb félsíkra az $s = 1$ pont kivételével, és a kiterjesztett függvény holomorf.

6.6. Az ábrán látható tartományon az $f(z) = \log \cos z$ függvény holomorfan értelmezhető úgy, hogy $f(0) = 0$. (Miért is?) Határozzuk meg $f(\pi)$ értékét az argumentum-elvből.



6.7. Az f függvény holomorf az a pont egy környezetében, $f(a) = b$ és $f'(a) \neq 0$. Írjuk fel f lokális inverzét a b pont egy kis környezetében paraméteres integrál alakban:

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i 1} \int_{|z-a|=r} \dots\dots\dots \, \mathrm{d}z.$$

Vezessük le ebből is az inverz függvény folytonosságát és differenciálhatóságát.

Házi feladatok

6.8. Hány gyöke van a $\sin z = 2z^2$ egyenletnek az egységkörben?

6.9. Hány gyöke van (multiplicitással számolva) az

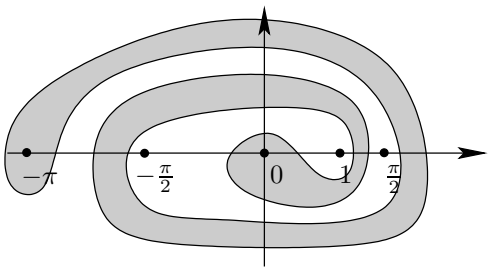
$$\frac{z - \frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{8}z} = \frac{8}{9}z^4$$

egyenletnek az $1 < |z| < 3$ tartományon?

6.10. Alkalmazhatjuk-e a Vitali-Montel tételt az $f_n(z) = \sin(nz)$ függvénysorozatra a valós egyenes egy kis környezetében?

6.11. Bizonyítsd be, hogy a polinomok gyökei folytonosan függnek az együtthatóktól, azaz ha az $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ polinom (ahol $a_n \neq 0$) gyökei $u_1, \ldots, u_n$, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan δ, hogy ha $b_0, \ldots, b_n$ komplex számok és $|b_j - a_j| < \delta$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, és a $b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0$ polinom gyökei $w_1, \ldots, w_n$, akkor az $1, \ldots, n$ indexek egy alkalmas σ permutációjára $|w_j - u_{\sigma(j)}| < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, n)$.

6.12. Az ábrán látható tartományon az $f(z) = \sqrt[3]{\dfrac{\cos z}{1-z}}$ függvény holomorfan értelmezhető úgy, hogy $f(0) = 1$. Határozzuk meg $f(-\pi)$ értékét az argumentum-elvből.



Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM6.1. A karakterisztikus függvények gyökeinek vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy tetszőleges X, Y független, azonos eloszlású, legfeljebb 5 abszolút értékű valószínűségi változókhoz létezik olyan $t \in [0, 1]$, amire $|P(X + Y < t) - t| > 10^{-10}$.

(Schweitzer-verseny alapján)

PM6.2. $\operatorname{Re} s > 0$ esetén legyen $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x$; kisebb valós rész esetén legyen $\Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$. Hol vannak a Γ-függvény gyökei és pólusai? Helyettesíthetjük-e a végtelen összegek kiszámolásához használt $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvényt a $\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ függvénnyel? Milyen nehézségekbe ütközünk, ha ilyen módon próbáljuk kiszámítani a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^3}$ összeget?

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-kft/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu