Matematika problémamegoldó szeminárium, 2016. április 26.

1. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenciálható, $f(0) = f(1) = 1$ és $f(a) = \sqrt{3}$ egy bizonyos $a \in (0,1)$-re. Mutassuk meg, hogy a függvény grafikonjának létezik két érintője, amik az x-tengellyel együtt szabályos háromszöget határoznak meg.

2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1+n+n^2} = ?$$

3. Határozzuk meg azokat az m, n pozitív egészeket, amikre $m+n$ és $mn+1$ is 2-hatvány.

4. Izomorf-e a $(\mathbb{Q}, +)$ és a $(Q^+, \cdot)$ csoport?

5. Határozzuk meg az összes $f : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ függvényt, amire a következők teljesülnek:
(a) $f(x,0) = f(0,x) = x$ minden $x \in [0,\infty)$-re;
(b) $f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z))$ minden $x, y, z \in [0,\infty)$-re;
(c) Létezik olyan valós k, hogy $f(x+y, x+z) = kx + f(y,z)$ minden $x, y, z \in [0,\infty)$-re,

6. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens sor, amelynek tagjai nonoton fogynak. Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$$

sor is divergens.

7. Legyen A és B két önadjungált 2×2-es komplex mátrix, sajátértékeik (α_1, α_2), illetve (β_1, β_2). Mik lehetnek az $A+B$ mátrix sajátértékei?

8. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ végtelen sokszor differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy tetszőleges x-re az $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$ sorozatban szerepel a 0. Igazoljuk, hogy f polinom.

9. (Írásban, angolul beadható.) Az A és B $n \times n$-es mátrixokra $A^{2005} = B^{2006} = I$ és $AB = BA$. Bizonyítsuk be, hogy $A+B+I$ invertálható.