Emlékeztető az Analízis 3 előadásokról (2017. ősz)

(Utolsó módosítás: 2017. december 7., 13:20)

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

1. előadás, szeptember 11.

[LTS2, 257–262. o.]

Elkezdtük a függvénysorozatok konvergenciáját. Volt a pontonkénti konvergencia, egyenlő mértékben egyenletesen folytonos függvénysorozat, egyenletes konvergencia definíciója, Cauchy-kritérium, egyenletes konvergencia és határérték, egyenletes konvergencia és folytonosság, a könyv szerint.

2. előadás, szeptember 13.

[LTS2, 263–271. o.]

Megvolt az egyenletes konvergencia és az integrálás és a differenciálás kapcsolata. A differenciálásnál a valaivel erősebb változatot is bebizonyítottuk: ha $f_1, f_2, \dots$ differenciálható az I intervallumon, $f_n' \to g$ egyenletesen, és van olyan $a \in I$ pont, amire az $f_n(a)$ sorozat konvergens, akkor f_n pontonként konvergens, $G = \sum f_n$ differenciálható, és $G' = g$. (Tehát nem tettük fel, hogy f_n folytonos vagy akár integrálható.) Kétféleképpen bizonyítottuk Dini tételét.

Elkezdtük a függvénysorok konvergenciáját: átírtuk a sorozatos tételeket, volt abszolút és egyenletesen abszolút konvergencia, Cauchy- és Weierstrass-kritérium. Megmutattuk, hogy a Takagi-függvény folytonos, de egyetlen pontban sem differenciálható.

3. előadás, szeptember 18.

[LTS2, 271–280. o.]

Megbeszéltük, hogy egyenletesen abszolút konvergens sor minden átrendezettje egyenletesen konvergens. Megvolt a Dirichlet- és az Abel-kritérium.

Elkezdtük a atványsorokat: konvergenciahalmaz, az intervallum belsejében abszolút konvergencia, kompakt részintervallumokon egyenletes konvergencia, Cauchy-Hadamard tétel, Abel folytonossági tétel, tagonkénti differenciálás és integrálás.

4. előadás, szeptember 25.

[LTS2, 281–288. o.]; [LTS2, 9–10. o.]

Megbeszéltük, hogy ha egy függvény hatványsorba fejthető, akkor a hatványsor csak a Talylor-sor lehet. Felírtuk (újra) a Taylor-formulát Lagrange- és Cauchy-féle maradéktaggal. Hatványsorba fejtettük az e^x, $\sin x$, $\cos x$, $1/x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\operatorname{arc\,tg} x$ és $\arcsin x$ függvényeket. Definiáltuk az "analitikus" függvényeket. Bizonyítás nélkül kimondtam, hogy ha $g(x)$ hatványsorba fejthető a körül és $f(x)$ hatványsorba fejthető $g(a)$ körül, akkor $f(g(x))$ is hatványsorba fejthető a körül. Ezek után már majdnem minden elemi függvény anailtikus, eltekintve az olyan balesetektől, mint például $|x| = \sqrt{x^2}$ a 0-ban.

Elkezdtük a pontsorozatok konvergenciáját $\mathbb{R}^p$-ben. Voltak külöböző távolság, nyílt gömb és zárt gömb, és sorozat konvergenciájának definícója metrikus terekben.

5. előadás, szeptember 27.

[LTS2, 10–21. o.]

Megvoltak a konvergencia ekvivalens átfogalmazásai. Véges sok elem hozzáadása/elhagyása nem változtatja meg a határértéket. A határérték egyértelmű. Konvergens sorozat részsorozata is ugyanoda tart. Linearitás. Cauchy-kritérium. Teljes metrikus tér fogalma. Bolzano-Weierstrass tétel. Bebizonyítottuk a Minkowski-egyenlőtlenséget. A $\|.\|_q$ és $\|.\|_\infty$ éis normák. Bebizonyítottuk, hogy véges dimenziós terekben bármely két norma ekvivalens. Következmény: a konvergencia fogalma nem függ

aattól, hogy melyik normát használjuk. Végtelen dimenzióban ez már nem igaz, például a $C([0,1])$ térben az $\|f\|_1 = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$ és $\|f\|_2 \int_0^1 (1-x)f(x)\,\mathrm{d}x$ két olyen norma, amelyeknek az aránya sem alulról,m sem felülről nem korlátos.

Ezek után volt, többnyire csak kimondva: halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja, belseje, külseje, határa, nyílt halmaz, zárt halmaz, unió, metszet, halmaz lezártja, torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz.

6. előadás, október 2.

[LTS2, 18–24. o.]

Megbeszéltük, hogy a belső/külső pont, nyílthalmaz stb. nem függ attó, hogy melyik normát használjuk. Definiáltuk az összefüggőség és az ív/útszerű összefüggőség fogalmát. Bebizonyítottuk, hogy nyílt halmazokra ekvivalens az, hogy a halmaz összefüggő, ívszerűen összefüggő, illetve bármely két pontja összeköthető töröttvonallal; minden nyílt halmaz összefüggő komponensekre bomlik; $\mathbb{R}^p$ összefüggő. Definiáltuk a tartomény fogalmát. Ezután volt: Cantor-metszettétel, minden nyílt halmaz racionális gömböl uniója, Lindelöf-lemma, Borel-tétel, kompaktság; $\mathbb{R}^p$-ben egy halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt; két diszjunkt, zárt, nem üres halmaz távolsága.

7. előadás, október 4.

[LTS2, 28–36. o.]

Megvolt a többváltozós függvények határértéke és folytonossága a tankönyv szerint. Weierstrass approximációs tétele nem volt. Megbeszéltük, hogy lehetne egyetlen ∞ ponttal kompaktifikálni a teret, és hogy komplexben ezt meg is tesszük. Definiáltuk függvények alsó és felső határértékét, és kimondtuk a limesz szuperiorra és limesz inferiorra vonatkozó határátmeneteket.

9. előadás, október 9.

[LTS2, 39–55. o.]

Lényegében a tankönyv volt, csak a sorrend volt más. Először felrajzoltam, hogy kb. mit szeretnénk egy p-változós függvény grafikonjának érintősíkjától. Definiáltuk a parciális és iránymenti deriváltakat. Volt példa olyan függvényre, aminek az origóban minden irányban 0 az ir'nymenti deriv'ltja, de a függvény még csak nem is folytonos. Megvolt a szélsőértékkeresés parciális deriváltakkal. Definiáltuk a differenciálhatóságot, bebizonyítottuk, hogy ha f differenciálható a-ban, akkor folytonos a-ban, parciálisan differenciálható a-ban, és a derivált mint lineáris függvény egyértelmű. Bevezettük az $f'(a)$, $\nabla f(a)$, $\operatorname{grad} f(a)$ jelöléseket. Megvolt az iránymenti derivált.

A Lagrange-középértéktétel még nem volt.

10. előadás, október 11.

[LTS2, –. o.]

11. előadás, október 18.

12. előadás, október 25.

Megtárgyaltuk a többváltozós deriváltak és a konvexitás kapcsolatát. Megvolt a többvántozós lokális injektivitás tétele, a lokális szürjektivitás tétele, a nyílt leépezés tétele és az inverzfüggvénytétel.

13. előadás, november 6.

Befejeztük az inverzfüggvénytételt, megvolt az implicitfüggvény-tétel. Megbeszéltük, hogy az egyenlettel megadott felület merőleges az egyenlet gradiensére, illetve (Laci kedvéért), ha a p-dimenziós térben q egyenlet gradiensei az a pontban lineárisan függetlenek, akkor ezek az egyenletek lokálisan egy $p-q$ dimenziós felületdarabot határoznak meg. Definiáltuk a feltételes lokális szélsőértékhelyeket, és heurisztikusan megbeszéltük, hogy a feltételes lokális szélsőértékhelyeken az egyenletek és a célfüggvény gradiensei lineárisan összefüggőek.

13. előadás, november 6.

Befejeztük az inverzfüggvénytételt, megvolt az implicitfüggvény-tétel. Megbeszéltük, hogy az egyenlettel megadott felület merőleges az egyenlet gradiensére, illetve (Laci kedvéért), ha a p-dimenziós térben q egyenlet gradiensei az a pontban lineárisan függetlenek, akkor ezek az egyenletek lokálisan egy $p-q$ dimenziós felületdarabot határoznak meg. Definiáltuk a feltételes lokális szélsőértékhelyeket, és heurisztikusan megbeszéltük, hogy a feltételes lokális szélsőértékhelyeken az egyenletek és a célfüggvény gradiensei lineárisan összefüggőek.

14. előadás, november 8.

Kimondtuk a Lagrange-multiplkátor módszert; abban az esetben, ha a célfüggvény is folytonosan differenciálható, kipotyog a lokális szürjektivitásból, de megbeszéltük a tankönyvi bizonyítást is.

Elkezdtük a Jordan-mértéket; a "mértéktől" elvárjuk, hogy pozitív, additív, egybevágóság-invariáns és normált legyen; az additivitásból persze következik, hogy monoton is.

15. előadás, november 13.

16. előadás, november 22.

17. előadás, november 27.

18. előadás, november 29.

Bizonyítás nélkül felírtuk a mérték- és integráltranszformáció tételét. Megvoltak a polárkoordináták, kiszámoltuk a kör területét és azt, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

Elkeztdük a paraméteres integrálokat; megvolt a kompakt eset.