Tájékoztató és részletes tételjegyzék az Analízis III. vizsgához (sillabusz)

2017/2018, I. félév

Matematika BSC, II. évfolyam, matematikus szakirány

A vizsga részei:

- Felkészülés (legalább 40 perc)
- A tételjegyzék két tételének vázlatos kidolgozása és szóbeli előadása.
- Válaszadás a vizsgáztató szóbeli kérdéseire.

A vizsgán a tételjegyzéket használhatjátok, a sillabuszt nem.

Az elégséges osztályzathoz legalább ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket és definíciókat, és ezeket pontosan meg is érteni.

Ha az egyik tételre a vizsgázó tudása elégtelen, akkor az egész vizsga értékelése elégtelen.

Egyszerre 4–5 vizsgázó készülhet a teremben.

Ez a tájékoztató letölthető innen:
http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/An3Sillabusz.pdf

A tételjegyzék pedig innen:
http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/An3Teteljegyzek.pdf

Részletes tételjegyzék

1. Függvénysorozatok konvergenciája

Függvénysorozat pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Egyenlő mértékben egyenletes függvénysorozatok. Az egyenletes konvergenciára vonatkozó Cauchy-kritérium. Dini tétele. Elégséges feltételek a limesz és a határérték felcserélhetőségére, a limesz folytonosságára, korlátosságára, integrálhatóságára, differenciálhatóságára.

2. Függvénysorok konvergenciája

Függvénysor egyenletes és abszolút konvergenciája. Nemnegatív, illetve egyenletesen abszolút konvergens sorok átrendezhetősége. Weierstrass-kritérium. Dirichlet-kritérium. Abel-kritérium.

3. Hatványsorok

Hatványsor, konvergenciaintervallum, konvergenciasugár (példák). Cauchy-Hadamard tétel. A hatványsor egyenletes abszolút konvergenciája. Tagonkénti differenciálás és integrálás. Abel folytonossági tétele.

4. Analitikus függvények

Taylor-sor. Analitikus függvények. Konkrét elemi függvények hatványsorba fejtése (e^x, $\sin x$, $\cos x$, $1/x$, $\log 1/(1-x)$, $\log(1+x)$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $(1+x)^c$). A $\log 2$ és a $\pi/4$ előállítása Leibniz típusú sorok összegeként.

5. Pontsorozatok konvergenciája

Lehetséges távolság definíciók $\mathbb{R}^p$-ben. Minkowski-egyenlőtlenség. $\mathbb{R}^p$, mint metrikus tér. Nyílt és zárt gömbök. Pontsorozat konvergenciája. A konvergencia ekvivalens átfogalmazásai. Véges sok elem hozzáadása/elhagyása nem változtatja meg a határértéket. A határérték egyértelmű. Konvergens sorozat részsorozata is ugyanoda tart. Linearitás. Cauchy-kritérium. Teljes metrikus tér fogalma. Bolzano-Weierstrass tétel. A $||.||_q$ és $||.||_\infty$ normák. Véges dimenziós terekben minden norma ekvivalens.

6. Ponthalmazok $\mathbb{R}^p$-ben

Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja, belseje, külseje, határa. Torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz. Normafüggetlenség. Nyílt halmaz, zárt halmaz. Példák. Unió, metszet. Halmaz lezártja. Összefüggőség. Útszerű összefüggőség. $\mathbb{R}^p$-ben minden összefüggő nyílt halmaz útszerűen is összefüggő. Tartomány. Cantor tétele. Kompaktság. Lindelöf-lemma. Borel tétele. Ponthalmazok távolsága.

7. Többváltozós függvények határértéke és folytonossága.

$\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények véges és végtelen határértéke valamilyen halmazra szorítkozva. A határérték egyértelmű. Átviteli elv. Példák. Függvény limesz szuperiora és limesz inferiora. Határátmenetek, rendőr-elv.

Folytonosság. Folytonosság és határérték kapcsolata. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv. Szekciófüggvények. Folytonos függvény szekciófüggvényei folytonosak. A kompozíció, összeg, szorzat, hányados folytonossága. Minden polinom folytonos. Az elemi függvények folytonosak. Weierstrass tétele. Egyenletes folytonosság. Heine tétele.

8. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények differenciálása

Parciális differenciálhatóság. A parciális deriváltak viselkedése lokális szélsőértékhelyeken. Szélsőértékkeresés kompakt halmazon. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény differenciálhatósága. Összehasonlítás az egyváltozós esettel. Differenciálhatóság, parciális differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata. A derivált és a parciális deriváltak kapcsolata. A parciális deriváltak folytonosságából következik a differenciálhatóság. Polinomok, racionális tört függvények és elemi függvények differenciálhatósága. Iránymenti derivált. Differenciálható fügvény minden irányban differenciálható. Az iránymenti derivált kiszámítása. Gradiens vektor. Lagrange-középértéktétel.

9. Valós vektorterek és lineáris leképezések

Normák ekvivalenciája véges dimenziós valós vektorterekben. A korábbi fogalmak megfogalmazása $\mathbb{R}^p$-ben. A torlódási pont, derivált halmaz, halmaz korlátossága, függvény határértéke és folytonossága független a normától. Összetett függvény határértéke és folytonossága.

A lineáris leképezés fogalma és alapvető tulajdonságai: műveletek, norma. A lineáris leképezések normált teret alkotnak. Lineáris leképezés reprezentálása mátrixszorzással.

10. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények differenciálása

Normált valós térből normált valós vektortérbe képező függvények differenciálása. Véges dimenziók esetén a definíció nem függ a normától. A derivált egyértelmű. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény akkor és csak akkor differenciálható, ha koordinátánként differenciálható. Jacobi-mátrix, Jacobi determináns. Ha f differenciálható, akkor folytonos.

Differenciálási szabályok: $f+g$, cf, $f \circ g$. Láncszabály. Inverz függvény differenciálása.

11. Magasabbrendű deriváltak

Magasabbrendű paricális deriváltak. Többszörös differenciálhatóság. A többszörös differenciálhatóság és a parciális deriváltak differenciálhatóságának kapcsolata. Polinomok, racionális tört függvények és elemi függvények akárhányszoros differenciálhatósága. Young tétele. A parciális deriválás sorrendjének felcserélhetősége.

A k-adik derivált mind k-lineáris forma és mint homogén k-adfokú polinom.

12. Taylor-polinomok. A második derivált alkalmazásai

k-adik differenciál. Taylor-polinom. A Taylor-polinom hibájának nagyságrendje. Függvény megváltozásának becslése a derivált normájával. Az $F(a+t(b-a))$ függvény k-adik deriváltjának felírása F k-adik differenciáljával.

A második differenciál mint kvadratikus alak. Hesse-mátrix. Lokális szélsőértékhelyek és a Hesse-mátrix definitségének kapcsolata. Konvex és konkáv függvények. Konvex nyílt halmazon értelemezett, kétszer differenciálható fügvény akkor és csak akkor konvex (konkáv), ha a második differenciál minden pontban pozitív (negatív) szemidefinit.

13. Inverz- és implicitfüggvény tétel

Elégséges feltételek a lokális injektivitásra, lokális szürjektivitásra és az inverz leképezés létezésére. Inverzfüggvénytétel. Implicitfüggvény-tétel. Feltételes lokális szélsőérték. Lagrange-féle multiplikátormódszer.

14. Jordan-mérték

Jordan-féle külső mérték, belső mérték és mérték. Tengelypárhuzamos téglák térfogata. A belső és a külső mérték ekvivalens definíciója a tér $1/n$ élű kockákra bontásával. A tengelypárhuzamos téglák mérhetők, és a mértékük megegyezik a térfogatukkal. A külső, illetve belső mérték szubbadditivitiása és szuperaditivitása. A külső mérték nem kisebb, mint a belső mérték. Nullmértékű halmazok és tulajdonságaik. Korlátos halmaz akkor és csak akkor mérhető, ha a határa nullmértékű. A mérhetőség átfogalmazása a kettévágási tulajdonsággal. $\mathbb{R}^p$-beli kompakt halmazon folytonos függvény grafikonja $\mathbb{R}^{p+1}$-ben nullmértékű. Középpontos hasonlóság. Minden gömb Jordan-mérhető. Az izometria nem változtatja meg a Jordan-mértéket. Minden korlátos konvex halmaz mérhető. (Az utóbbira a csak bizonyítás vázlata.)

15. Jordan-mérhető halmazok

A Jordan-mérhető halmazok $\mathcal{J}$ halmazgyűrűje. A Jordan-mérték az egyetlen $\mathcal{J} \to \mathbb{R}$ függvény, ami pozitív, additív, eltolásinvariáns és normált. Jordan-mérhető halmaz λ-szorosának mértéke.

A Cantor-halmaz és a Sierpinski-szőnyeg mértéke. Síkbeli háromszögek területe. Jordan-mérhető halmaz tengelyirányú szeleteinek eggyel kisebb dimenziós külső/belső mértéke Riemann-integrálható és az integráljuk megegyezik a halmaz térfogatával. Általános henger és kúp térfogata. Gömb térfogata. Paralelepipedon térfogata. Mérhető halmaz lineáris transzformáltjának mérhetősége és mértéke.

16. Jordan-mérték szerinti integrál

Korlátos függvények integrálása Jordan-mérhető halmazokon. Felosztás, finomítás, finomság. Alsó és felső összegek, oszcillációs összegek. Alsó és felső integrál. Integrálhatóság és átfogalmazásai. Integrálhatóság részhalmazokon. Integrálhatóság egymásba nem nyúló halmazok unióján. Végtelenül finomodó felosztássorozathoz tartozó alsó és felső összegek az alsó, illetve a felső integrálhoz tartanak. Ha a függvény integrálható, akkor végtelenül finomodó felosztássorozathoz tartozó integrálközelítő összegek az integrálhoz tartanak.

17. Az integrál tulajdonságai

Összeg, konstansszoros, szorzat, hányados és összetett függvény integrálhatsága. Ha egy függvény korlátos és nullmértékű halmaztól eltekintve folytonos, akkor integrálható. Halmaz külső és belső mértéke azonos a karakteriszikus függvénye felső, illetve alsó integráljával. Normáltartomány 1-gyel magasabb dimenziós Jordan-mértékének kiszámítása.

18. Az integrál kiszámítása

Mérhető halmazok szorzatán vett integrál felbontása az alsó és felső integrálok integráljává. A szukcesszív integrálás tétele. Az $f(x)g(y)$ alakú függvények integrálhatósága. A p-dimenziós gömb térfogata. Mérték- és integráltranszformáció (bizonyítás nélkül). Polárkoordinátás helyettesítés. Az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$ integrál kiszámítása.

19. Paraméteres integrálok

Paraméteres integrálok. Elégséges feltételek a paraméteres integrál folytonosságára, integrálhatóságára és differenciálhatóságára. Improprius paraméteres integrálok. Egyenletes konvergencia. Weierstrass-kritérium. Improprius paraméteres integrálok folytonossága, integrálhatósága és differenciálhatósága. A Γ és a B-függvény differenciálhatósága.

20. Vonalintegrálok

Görbék. Folytonosság, differenciálhatóság, Lipschitz-tulajdonság, stb. Görbe hossza, rektifikálható görbe. Átparaméterezés és megfordítás. Kettévághatóság. Egy görbe akkor és csak akkor rektifikálható, ha a koordinátafüggvényei korlátos változásúak. Függetenség a paraméterezéstől, linearitás és additivitás. Átírások Riemann-Stieltjes, illetve Riemann-integrállá. Elégséges feltétel a vonalintegrál létezésére. Differenciálható görbe hosszának kiszámítása. Az integrál kiszámítása differenciálható görbén. Vonalintegrálok. Tulajdonságok. Feltételek a létezésre. Átírás Riemann-iintegrállá, ha az integrációs út differenciálható. Newton-Leibniz formula valós vonalintegrálokra.

21. A primitív függvény létezésének feltételei

Konzervatív vektormező, primitív függvény és potenciálfüggvény fogalma. A primitív függvény konstans erejéig egyértelmű. Ha $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt, és $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos, akkor a következők ekvivalensek: (a) f-nek létezik primitív függvénye; (b) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt, folytonos, rektifikálható görbén; (c) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt töröttvonalon. Differenciálható f esetén a primitív függvény létezéséhez szükséges, hogy f' mindenhol szimmetrikus legyen. A lineáris leképezés primitív függvénye. Goursat-lemma valós vonalintegrálokra. A primitív függvény létezése konvex és csillagszerű tartományokon.

22. Homotópia és vonalintegrál

Homotóp görbék. A vonalintegrál azonos végpontú, zárt, illetve nullhomotóp görbéken. Egyszeresen összefüggő tartomány. A primitív függvény létezése egyszeresen összefüggő tartományokon. Példák egyszeresen összefüggő és nem egyszeresen összefüggő tartományokra, és olyan függvényekre, amelyeknek lokálisan létezik, de globálisan nem létezik primitív függvénye. Zárt vezető mágneses örvényerőssége és a Gauss-féle összekapcsolódásái szám kapcsolata.