1. Valós analízis gyakorlat, 2017. szeptember 13.

Osztályozás: gyakorlati jegy $\approx \frac{2 \cdot Z_1 + 2 \cdot Z_2 + \overline{R} + P}{5} \pm M$, ahol Z_1 és Z_2 a két ZH pontszám, $\overline{R}$ a 5–15 röpdolgozat átlaga a két legrosszabb nélkül, P a megszerzett Pedál Medál Pirospontok száma, M az órai munka (a.k.a. pofafaktor). Javítási lehetőség: a pót ZH-n (várható időpont: december 19.).

A gyakorlatokon való részvétel kötelező. Ha valaki a gyakorlatok negyedénél többről hiányzik, akkor csak rendkívüli, igazolt esetben, többletfeladatok teljesítése után kaphat gyakorlati jegyet. Ha valaki a gyakorlatoknak több mint a harmadánál többről hiányzik, akkor egyáltalán nem kaphat gyakorlati jegyet.

Bővebb tájékoztató az intenzív gyakorlatokról:
http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/Tajekoztato.html

1.1. Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Mely intervalumokon egyenletesen konvergensek?

$$\sqrt[n]{|x|} \qquad \frac{x^n}{n!} \qquad x^n - x^{2n} \qquad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

1.2. Igaz-e, hogy

(a) monoton függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze monoton?
(b) szigorúan monoton függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze szigorúan monoton?
(c) korlátos függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze korlátos?
(d) folytonos függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze folytonos?
(e) Lipschitz függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze Lipschitz?
(f) monoton függvényekből álló sorozat egyenletes limesze monoton?
(g) szigorúan monoton függvényekből álló sorozat egyenletes limesze szigorúan monoton?
(h) korlátos függvényekből álló sorozat egyenletes limesze korlátos?
(i) folytonos függvényekből álló sorozat egyenletes limesze folytonos?
(j) Lipschitz függvényekből álló sorozat egyenletes limesze Lipschitz?

1.3. Igazoljuk, hogy egyenletesen korlátos függvénysorozat pontonkénti limesze korlátos.

1.4. Igaz-e, hogy ha a folytonos $[a, b] \to \mathbb{R}$ függvényekből álló (f_n) sorozat egyenletesen konvergens az $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ halmazon, akkor a teljes intervallumon egyenletesen konvergens?

1.5. Igazoljuk, hogy ha az $f_1, f_2, \ldots : I \to \mathbb{R}$ függvénysorozat egyenletesen korlátos és egyenlő mértékben egyenletesen folytonos az I korlátos, zárt intervallumon, akkor létezik egyenletesen konvergens részsorozata.

Házi feladatok

1.6. Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Mely intervalumokon egyenletesen konvergensek?

$$\frac{x^n}{1 + x^n} \qquad \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \qquad \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

1.7. Igaz-e, hogy

(a) konvex függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze konvex?
(b) szigorúan konkáv függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze szigorúan konkáv?
(c) integrálható függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze integrálható?
(d) differenciálható függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze differenciálható?
(e) konvex függvényekből álló sorozat egyenletes limesze konvex?
(f) szigorúan konkáv függvényekből álló sorozat egyenletes limesze szigorúan konkáv?
(g) integrálható függvényekből álló sorozat egyenletes limesze integrálható?
(h) differenciálható függvényekből álló sorozat egyenletes limesze differenciálható?

1.8. Igazoljuk, hogy ha az (f_n) függvénysorozat a H halmaz minden megszámlálható részén egyenletesen konvergens, akkor H-n is egyenletesen konvergens.

1.9. Az $f_1, f_2, \ldots : I \to \mathbb{R}$ függvénysorozat *egyenletesen Lipschitz*, ha $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x, y \in I\ |f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|$. Igazoljuk, hogy egyenletesen Lipschitz függvénysorozat pontonkénti limesze Lipschitz.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM1 Igazoljuk, hogy nincs olyan, folytonos függvényekből álló sorozat, amely a Dirichlet-függvényhez tart pontonként.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu