2. Valós analízis gyakorlat, 2017. szeptember 14.

2.1. Igaz-e, hogy ha $f_1, f_2, \dots$ folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények egy lokálisan egyenletesen konvergens sorozata, akkor $\lim f_n$ folytonos?

2.2. Mutassuk meg, hogy ha $c > 1$, akkor a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^c}$ függvénysor egyenletesen konvergens.

2.3. (a) Igazoljuk, hogy az

$$f(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots$$

hatványsor egyenletesen konvergens $[0, 1]$-ben.

(b) $f'(x) =?$ $\quad f(x) =?$

2.4. Mutassunk példát olyan, nemnegatív függvényekből álló, egyenletesen konvergens függvénysorra, amire nem alkalmazható a Weierstrass-kritérium.

2.5. Igaz-e, hogy ha $f_1, f_2, \dots$ folytonos, nemnegatív értékű függvények egy sorozata, akkor az $F(x) = \inf\{f_1(x), f_2(x), \dots\}$ függvény is folytonos?

2.6. Igaz-e a Bolzano-Weierstrass tétel $C[a, b]$-ben? Avagy, igaz-e, hogy folytonos függvények bármely, egyenletesen korlátos sorozatából kiválasztható egyenletesen konvergens részsorozat?

Házi feladatok

2.7. Legyen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1)$$

az Euler-féle zeta-függény.

(a) Milyen sor állíthatja elő $\zeta(s)$ deriváltját?

(b) Bizonyítsuk be, hogy $\zeta(s)$ akárhányszor differenciálható az $(1, \infty)$ intervalumban.

2.8.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+2} \right) =?$$

2.9. Mutass példát olyan függvénysorra, amely egyenletesen konvergens és pontonként abszolút konvergens is, de nem egyenletesen abszolút konvergens.

2.10. Igaz-e a Weierstrass-tétel $C[a, b]$-ben? Avagy, igaz-e, hogy ha $H \subset C[a, b]$ nem üres, korlátos, zárt halmaz, és $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos függvény („funkcionál"), akkor f-nek van maximuma?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM2 Bizonyítsd be, hogy a Baire-kategóriatétel igaz $C[a, b]$-ben, avagy $C[a, b]$ nem áll elő megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/

További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu