3. Valós analízis gyakorlat, 2017. szeptember 21.

3.1. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ *Dirichlet-sor* az $x = x_0$ pontban konvergens. Bizonyítsuk be, hogy a sor $x > x_0$ esetén is konvergens.

3.2. Igaz, vagy hamis?

(1) Ha $f_1, f_2, \ldots : H \to \mathbb{R}$, és $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ egyenletesen konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} \cdot f_n)$ is egyenletesen konvergens.

(2) Ha $f_1, f_2, \ldots : H \to \mathbb{R}$, és $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} \cdot f_n)$ egyenletesen konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ is egyenletesen konvergens.

3.3. Számítsd ki a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{99} x^n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ hatványsorok konvergenciasugarát.

3.4. Mutassuk meg, hogy $c \leq 1$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^c}$ függvénysor nem egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en.

3.5. Tegyük fel, hogy az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara R, és legyen $0 < c < R$.

(a) Írjunk fel olyan $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$ hatványsort, amelynek összege a c pont $R-c$ sugarú környezetében éppen $f(x)$.

(b) Lehet-e a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara $(R-c)$-nél nagyobb?

3.6. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$ *Laurent-sor* az $x = r$ és az $x = R$, $(0 < r < R)$ is esetén konvergens (azaz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ is konvergens), akkor konvergens minden olyan x értékre is, amelyre $r < |x| < R$.

Házi feladatok

3.7. Igaz, vagy hamis?

(3) Ha $f_1, f_2, \ldots : H \to \mathbb{R}$, és $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} \cdot f_n)$ is konvergens.

(4) Ha $f_1, f_2, \ldots : H \to \mathbb{R}$, és $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} \cdot f_n)$ egyenletesen konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ is egyenletesen konvergens.

3.8. Van-e olyan $\sum_{n=0} a_n x^n$ hatványsor, ami divergens az 1-ben, de a derivált sor konvergens az 1-ben?

3.9. Számítsd ki a $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n^2}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{e^{\log^5 n}}$ hatványsorok konvergenciasugarát.

3.10. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ valós, $b_1, b_2, \ldots$ pozitív valós számokból álló sorozat. Bizonyítsd be, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ is ~~abszolút~~ konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (b_n)^x$ függvénysor egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu