4. Valós analízis gyakorlat, 2017. szeptember 27.

4.1. Írjuk fel a következő függvények hatványsorát:

(a) $\dfrac{1}{x^2}$ a 3 körül; (b) $\log x$ az 5 körül.

Mutassuk olyan intervallumot, amelyben a Taylor-sor előállítja a függvényt.

4.2. Hány tagot kell az $\operatorname{arc\,tg} x$ függvény Taylor-sorából figyelembe vennünk ahhoz, hogy a $\pi = 4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + 4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$ képlet hibája 10^{-6}-nál kisebb legyen?

4.3. Legyen $c_0 = 1$ és $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$. (Ezeket hívják Catalan-számoknak.) Definiáljuk a $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ „generátorfüggvényt".

(a) Bizonyítsd be, hogy a G-t definiáló hatványsor konvergens a 0 egy környezetében.

(b) Igazold, hogy a konvergenciaintervallum belsejében $G(x) = xG^2(x) + 1$.

(c) Számítsd ki és fejtsd hatványsorba G-t, és számítsd ki c_n-et.

4.4. (a) Legyen α valós szám, nem nemnegatív egész. Vizsgáljuk meg a

$$\log\left|\binom{\alpha}{k}\right| \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

sorozat nagyságrendjét.

(b) Milyen α esetén konvergens a $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ binomiális sor az $x = +1$ pontban?

(c) Milyen α esetén konvergens a $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ binomiális sor az $x = -1$ pontban?

Házi feladatok

4.5. Írjuk fel a következő függvények Taylor-sorát.

(a) $\log(x^2 - 1)$ a 2 körül; (b) $\operatorname{ar\,sh} x^2$ a 0 körül; (c) $\operatorname{ar\,cth} x$ a 2 körül.

Mutassunk olyan intervallumot, amelyben a Taylor-sor előállítja a függvényt.

4.6. Tanultuk, hogy $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ ha $|x| < 1$. Milyen összefüggéseket kapunk az $\alpha = -1$ és $\alpha = -2$ esetekben?

4.7. Konstruáljunk olyan, akárhányszor differenciálható elemi függvényt, aminek 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens, a $[-1, 1]$ intervallumban előállítja a függvényt, de máshol nem.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM4.1. Legyen p_n az n szám olyan partícióinak száma, amiben a tagok különbözők. (Megengedjük az egytagú, sőt az üres összeget is. Pl. $p_0 = 1$ és $p_6 = 4$, mert $6 = 5+1 = 4+2 = 3+2+1$.) A $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ generátorfüggvény segítségével keress felső becslést p_n-re.

PM4.2. Legyen α valós szám, nem nemnegatív egész. Bizonyítsd be, hogy az

$$\left|\binom{\alpha}{k} k^{\alpha+1}\right| \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

sorozat egy pozitív valós számhoz tart.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/

További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu