5. Valós analízis gyakorlat, 2017. szeptember 28.

5.1. Mi az alábbi halmazok belseje, külseje és határa $\mathbb{R}^2$-ben? Mi a határ határa? Mik az izolált pontok? Mi a deriválthalmaz?

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}; \qquad \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}; \qquad \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x,y>0,\ x+y<1\big\};$$

5.2. Igaz vagy hamis?

(a) (R^p-ben) véges sok nyílt halmaz uniója nyílt.
(b) Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.
(c) Véges sok zárt halmaz uniója nyílt.
(d) Véges sok zárt halmaz metszete nyílt.
(e) Akárhány nyílt halmaz uniója nyílt.
(f) Akárhány nyílt halmaz metszete nyílt.
(g) Akárhány zárt halmaz uniója nyílt.
(h) Akárhány zárt halmaz metszete nyílt.
(i) A deriválthalmaz mindig zárt.
(j) Az izolált pontok halmaza zárt.

5.3. (a) Igazoljuk, hogy egy metrikus tér tetszőleges A részhalmazára

$$\operatorname{int}\operatorname{int}A=\operatorname{int}A; \quad \operatorname{int}\operatorname{ext}A=\operatorname{ext}A; \quad \partial\partial A\subset\partial A; \quad \partial(\operatorname{int}A)\subset\partial A; \quad \partial(\operatorname{ext}A)\subset\partial A.$$

(b) Igaz-e, hogy $\partial(\operatorname{int}A)=\partial(\operatorname{ext}A)$?

5.4. (a) Igazoljuk, hogy tetszőleges metrikus térben a nyílt és a zárt halmazok halmazainak számossága megegyezik.

(b) Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^p$-nek kontinuum sok nyílt, és kontinuum sok zárt részhalmaza van.

5.5. (a) Igazoljuk, hogy ha $K\subset\mathbb{R}^p$ nemüres, zárt halmaz, akkor van az origótól minimális távolságú pontja.

(b) Igazoljuk, hogy ha $K\subset\mathbb{R}^p$ nemüres, korlátos, zárt halmaz, akkor van az origótól maximális távolságú pontja.

5.6. Igazoljuk, hogy bármely metrikus térben bármely H halmazra $H''\subset H'$, avagy torlódási pontok torlódási pontja torlódási pont.

Házi feladatok

5.7. Mi az alábbi halmazok belseje, külseje és határa $\mathbb{R}^2$-ben? Mi a határ határa? Mik az izolált pontok? Mi a deriválthalmaz?

$$\emptyset; \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=1/n,\ |y|<\frac{1}{n}\right\}$$

5.8. (a) Igazoljuk, hogy egy metrikus tér tetszőleges A,B részhalmazaira $\partial(A\cup B)\subset\partial A\cup\partial B$ és $\partial(A\cap B)\subset\partial A\cup\partial B$.

(b) Igaz-e, hogy $\big(\partial(A\cup B)\big)\cup\big(\partial(A\cap B)\big)=\partial A\cup\partial B$?

5.9. Legyen $K\subset\mathbb{R}^p$ az origóra szimmetrikus halmaz, amire teljesül, hogy bármely $x\in\mathbb{R}^p$, $x\neq 0$ pontra a $[0,x]$ szakasznak van 0-tól különböző pontja K-ban, és legyen

$$||x||_K=\inf\{r>0: x\in r\cdot K\}.$$

Ellenőrizzük, hogy $||.||_K$ akkor és csak akkor norma $\mathbb{R}^p$-n, ha K konvex.

5.10. Igazoljuk, hogy ha $K\subset\mathbb{R}^p$ nemüres, korlátos, zárt halmaz, akkor a pontjai között fellépő távolságok között van maximális.

5.11. (a) Igazoljuk, hogy ha egy metrikus térben teljesül a Bolzano-Weierstrass tétel, akkor a tér teljes.

(b) Mutassunk példát olyan metrikus térre, ami teljes, de nem teljesül a Bolzano-Weierstrass tétel.

5.12. Legyen $A\subset\mathbb{R}^p$. Legfeljebb hány különböző halmaz lehet az

$$A, \quad \partial A, \quad \partial\partial A, \quad \partial\partial\partial A,\ldots$$

sorozatban?

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu