6. Valós analízis gyakorlat, 2017. október 4.

6.1. Igazoljuk, hogy ha $K \subset \mathbb{R}^p$ zárt halmaz, akkor a $\big\{|x| : x \in K\big\}$ halmaz is zárt halmaz $\mathbb{R}$-ben.

6.2. Igazoljuk, hogy ha $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt halmaz, akkor G bármely két pontja összeköthető olyan töröttvonallal, amelynek minden szakasza párhuzamos valamelyik koordináta-tengellyel.

6.3. (a) Igazoljuk, hogy minden $K \subset \mathbb{R}^p$ nemüres, zárt halmaznak van az origótól minimális távolságú pontja.

(b) Igazoljuk, hogy ha $K \subset \mathbb{R}^p$ nemüres, korlátos, zárt halmaz, akkor van az origótól maximális távolságú pontja.

6.4. Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ folytonos görbe. Mutassuk meg, hogy a görbe értékkészlete kompakt.

6.5. A Cantor-metszettétel segítségével igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^p$-ben teljesül a Baire-kategóriatétel:

(a) ha $F_1, F_2 \dots$ sehol sem sűrű halmazok (azaz $\operatorname{int}\operatorname{cl} F_n = \emptyset$), akkor $\operatorname{int}\big(\bigcup F_n\big) = \emptyset$.

(b) ha $G_1, G_2, \dots$ sűrű nyílt halmazok (azaz $\operatorname{cl} A = \mathbb{R}^p$), akkor $\bigcap G_n$ sűrű.

6.6. Két hegymászó az $y = f(x)$ grafikonú hegyet akarja megmászni, ahol $f : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvény, és $f(0) = f(1) = 0$. Az egyik hegymászó a $(0, 0)$, a másik az $(1, 0)$ pontból indul. A két hegymászó úgy szeretne találkozni (mondjuk a hegy tetején), hogy útközben minden pillanatban azonos magasságban vannak.

A két hegymászó pillanatnyi állapotát leírhatjuk egy $(u, v) \in [0, 1]^2$ számpárral: a két hegymászó az $(u, f(u))$ és a $(v, f(v))$ pontban van. Legyen $H_< = \{(u, v) \in [0, 1]^2 : f(u) < f(v)\}$, $H_> = \{(u, v) \in [0, 1]^2 : f(u) > f(v)\}$ és $H_= = \{(u, v) \in [0, 1]^2 : f(u) = f(v)\}$, továbbá minden $\varepsilon > 0$-ra legyen $H_\varepsilon = \{(u, v) \in [0, 1]^2 : |f(u) - f(v)| < \varepsilon\}$; ezek az olyan állapotok halmazai, amikor az első hegymászó alacsonyabban, magasabban, ugyanolyan magasan van, mint a másik, illetve amikor a magasságaik különbsége kisebb, mint ε.

(a) Mutassuk meg, hogy az $H_<$, a $H_>$ és a H_ε halmaz is relatív nyílt $[0, 1]^2$-ben, azaz az egységnégyzet metszetei alkalmas nyílt halmazokkal, az $H_=$ pedig zárt.

(b) Mutassuk meg, hogy $H_=$ és H_ε is összefüggő.

(c) Mutassuk meg, hogy a két hegymászó tud találkozni úgy, hogy útközben a magasságuk különbsége mindig kisebb, mint 10^{-10}; avagy, léteznek olyan $g, h : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvények, amelyekre $g(0) = 0$, $h(0) = 1$, $g(1) = h(1)$, és minden $t \in [0, 1]$-re $\big|f(g(t)) - f(h(t))\big| < 10^{-10}$.

(d) Igaz-e, hogy a két hegymászó tud találkozni úgy, hogy útközben mindig pontosan ugyanakkora magasságban vannak? Avagy: léteznek-e biztosan olyan $g, h : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvények, amelyekre $g(0) = 0$, $h(0) = 1$, $g(1) = h(1)$, és minden $t \in [0, 1]$-re $f(g(t)) = f(h(t))$?

Házi feladatok

6.7. Igazoljuk, hogy ha $K \subset \mathbb{R}^p$ nemüres, korlátos, zárt halmaz, akkor van átmérője, vagyis két olyan (nem feltétlenül különböző) pontja, amelyek távolsága maximális.

6.8. Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt halmaz, és $\gamma : [a, b] \to G$ folytonos görbe. Mutassuk meg, hogy van olyan $r > 0$, amelyre a görbe r-sugarú környezete is G-ben fekszik, azaz $\bigcup_{t \in [a,b]} B\big(\gamma(t), r\big) \subset G$.

6.9. Igazoljuk, hogy ha K kompakt halmaz egy metrikus térben, akkor K minden zárt részhalmaza kompakt.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM6.1. Bizonyítsd be Helly tételét:

(1) Ha $n \leq p + 1$, $F_1, \dots, F_n \subset \mathbb{R}^p$ konvex halmazok, és közülük bármely $(p + 1)$-nek van közös pontja, akkor az összes F_i-nek van közös pontja.

(2) Ha $F_i \subset \mathbb{R}^p$ $(i \in I)$ konvex zárt halmazok egy tetszőleges rendszere, legalább az egyik korlátos, továbbá bármely $(p + 1)$-nek van közös pontja, akkor az összes F_i-nek van közös pontja.

PM6.2. Konstruálj olyan diszjunkt, összefüggő $A, B \subset [0, 1] \times [0, 1]$ halmazokat, amikre $\big\{(0, 0), (1, 1)\big\} \subset A$, és $\big\{(1, 0), (0, 1)\big\} \subset B$.

PM6.3. Bizonyítsd be, hogy minden (X, d) összefüggő, kompakt metrikus térhez létezik olyan α valós szám, hogy tetszőleges n pozitív egészhez és $a_1, \dots, a_n \in X$ pontokhoz van olyan $b \in X$, amire

$$\frac{d(a_1, b) + \dots + d(a_n, b)}{n} = \alpha.$$

CIIM 5, Kolumbia, 2013

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/

További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu