7. Valós analízis gyakorlat, 2017. október 5.

7.1. Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto x + y$ függvény folytonos. Keressünk az $(1, 2)$ pontban $\varepsilon = 10^{-3}$-hoz δ-t.

7.2.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2} = ? \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x + \cos y - 2}{x^2 + y^2} = ?$$

Keressünk ε-hoz δ-t!

7.3. (a) Létezik-e az $f(x, y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$ függvénynek határértéke az origóban az $\{(x, y) : \ x \neq y\}$ halmazra szorítkozva?

(b) Kiterjeszthető-e a függvény folytonosan a teljes síkra?

7.4. Egy $R^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek minden origón átmenő egyenesre szorítkozva 0 a határértéke az origóban. Következik-e ebből, hogy a függvénynek van határértéke az origóban?

7.5. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény mindegyik $f_{x=a}$ szekciófüggvénye folytonos, és mindegyik $f_{y=b}$ szekciófüggvénye monoton és folytonos. Igazoljuk, hogy f folytonos.

Házi feladatok

7.6. Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto xy$ függvény folytonos. Keressünk az $(1, 2)$ pontban $\varepsilon = 10^{-3}$-hoz δ-t.

7.7.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{ch} x - \cos y}{x^2 + y^2} = ?$$

Keress ε-hoz δ-t!

7.8. Igazoljuk, hogy egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos, ha minden nyílt halmaz f szerinti ősképe nyílt.

7.9. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ és $f : A \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Legyen B azon $\mathbb{R}^p$-beli pontok halmaza, amelyekben az f-nek létezik véges határértéke az A halmazra szorítkozva, és legyen tetszőleges $b \in B$-re $g(b) = \lim\limits_{x\to b,\, x\in A} f(x)$. Igazoljuk, hogy g folytonos a B halmazon.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu