8. Valós analízis gyakorlat, 2017. október 11.

8.1. Határozzuk meg $x^3 + x^2 - xy$ minimumát és maximumát a $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten.

8.2. Igazoljuk, hogy az n-dimenziós vektorok skaláris szorzása, mint $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható. Mi a deriváltja?

8.3. Írjuk fel az $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ függvény grafikonját az $(1,2,3,14)$ pontban érintő sík egyenletét.

8.4. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ differenciálható az a pontban, $f(a) = 0$, és $f'(a) = 0$, akkor minden korlátos $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényre gf is differenciálható a-ban.

(Miért nem azt írtuk a feltételben, hogy $f(a) = f'(a) = 0$?)

8.5. Igazoljuk, hogy az $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$ függvény az origóban minden irányban differenciálható. Létezik-e olyan a vektor, amire tetszőleges v egységvektor esetén $D_v f(0,0) = a \cdot v$?

8.6. Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható, és minden a-n átmenő egyenesre megszorítva f-nek lokális minimuma van az a pontban, akkor f-nek lokális minimuma van az a-ban?

Házi feladatok

8.7. Határozd meg $xy \cdot \log(x^2+y^2)$ maximumát és minimumát az $x^2 + y^2 \le r$ körlemezen.

8.8. Igazold, hogy az $(x,y) \mapsto x^y$ függvény $(x > 0)$ differenciálható. Mi a deriváltja?

8.9. Legyen M valós $q \times r$-es mátrix. Mi az $f(x_1,\dots,x_q,y_1,\dots,y_r) = (x_1,\dots,x_q)M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$ bilineáris forma deriváltja?

8.10. Konstruáljunk olyan $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amelynek az origóban minden iránymenti deriváltja 0, de a függvény nem korlátos az origó egyetlen környezetében sem.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM8.1. Egy $(\mathbf{p}_i)_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^3$ véges ponthalmazra gömbfelületet szeretnénk illeszteni. A gömb egyenletét $f(\mathbf{x}) = a|\mathbf{x}|^2 + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle + c = 0$ alakban írjuk fel, és olyan együtthatókat keresünk, amelyekre

$$\sum_{i=1}^n \big(f(\mathbf{p}_i)\big)^2 = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b}^t & c \end{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} |\mathbf{p}_i|^2 \\ \mathbf{p}_i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}_i|^2 & \mathbf{p}_i^t & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ \mathbf{b} \\ c \end{pmatrix}$$

minimális az $f(\mathbf{x})$ egyenlet valamilyen normalizálása mellett, például

(a) $a = 1$; vagy (b) $|\mathbf{b}|^2 + 4ac = 1$.

Magyarázzuk meg, hogy a (b) módszer miért adhat jobb eredményt, mint az (a) módszer.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu