9. Valós analízis gyakorlat, 2017. október 12.

9.1. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. A Lagrange-középértéktételből vezessük le, hogy ha tetszőleges pontban

$$\langle f'(x,y,z), (x,y,z)\rangle \geq 0,$$

akkor f-nek abszolút minimuma van az origóban.

9.2. Írjuk fel a következő leképezések Jacobi-mátrixát.

$$f(x,y) = \big(x+y, xy, \cos(x+y)\big); \quad g(x,y) = \big(e^{x+y}, xy\big)$$

9.3. Vezessük le a láncszabályból az n-tényezős szorzat deriváltjára vonatkozó differenciálási szabályt.

9.4. Mik azok a differenciálható $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, amikre $D_1 f \equiv D_2 f$? (Melyik iránymenti derivált 0 a feltétel szerint?)

9.5. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható, és tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $D_1 f(x,y) = y \cdot D_2 f(x,y)$.

(1a) Bizonyítsuk be, hogy az $y = ce^{-x}$ alakú görbéken f konstans.
(1b) Hogy lehet az $y = ce^{-x}$ képletet kitalálni?
(2) Bizonyítsuk be, hogy $f(x,y) = g(e^x y)$ valamilyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénnyel.
(3) Bizonyítsuk be, hogy a g függvény differenciálható.

9.6. Legyen $x \in \mathbb{R}$, $|y| < \frac{\pi}{2}$ esetén $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Írjuk fel a függvény inverzét, és ellenőrizzük az inverz függvény differenciálási szabályát.

Házi feladatok

9.7. Írd fel a következő leképezések Jacobi-mátrixát.

$$f(x,y) = \big(\sin x, \cos y\big); \quad g(x,y) = \big(\log x, x^2 + y^2\big); \quad h = f \circ g.$$

9.8. Mi lehet az $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ leképezés (azaz a komplex négyzetre emelés) lokális inverzének Jacobi-mátrixa a $(3,4)$ pontban?

9.9. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre tetszőleges x, y esetén

$$y^2 \cdot D_1 f(x,y) = x^2 \cdot D_2 f(x,y).$$

(a) Bizonyítsd be, hogy $f(x,y) = g(x^3 + y^3)$ egy alkalmas g függvénnyel.
(b) Igazold, hogy g differenciálható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon.
(c) Igaz-e, hogy a g függvény differenciálható a 0-ban?

9.10. (a) Igazold, hogy minden $a = (a_1, \ldots, a_n)$ valós sorvektorra $\|a\| = |a|$.

(b) Igazold, hogy minden $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrixra

$$\max_{i \in \{1,\ldots,k\}} \sqrt{a_{i1}^2 + \ldots + a_{in}^2} \leq \|A\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu