Valós analízis ZH, 2017. október 16.

Minden beadott lapra írd rá a nevedet.

A feladatok nem, vagy nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek. A feladatokat tetszőleges sorrendben kidolgozhatod.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

Végeredmény közlése önmagában nem elegendő (0 pont), megfelelő indoklás szükséges. Az előadáson szerepelt tételeket, illetve a gyakorlaton bizonyított állításokat bizonyítás nélkül felhasználhatod, ha pontosan idézed. Egyéb állításokra nem elég hivatkozni, hanem bizonyítást is kell adni, a tanult anyag felhasználásával.

Törekedj a rendezett, áttekinthető, világos, jól olvasható leírásra. Csak arra adok pontot, amit nagyító nélkül is el tudok olvasni.

Semmilyen segédeszköz sem használható, **számológép sem**.

1. Legyen minden $c \in \mathbb{R}$-re

$$f_c(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{|xyz|^c}{|x|+|y|+|z|} & \text{ha } xyz \neq 0 \\ 0 & \text{ha } xyz = 0. \end{cases}$$

(a) Milyen c-re van f_c-nek határértéke a 0-ban?
(b) Milyen c-re folytonos a 0-ban?
(c) Milyen c-re differenciálható a 0-ban?

2. Határozd meg $x^2y^3\log(x^2+y^2)$ értékkészletét az $x^2+y^2 \leq 1$ halmazon.

3. Bizonyítsd be, hogy ha az $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$ *Laurent-sor* $x=1$ és $x=2$ esetén is konvergens (azaz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ is konvergens), akkor az $[1,2]$ intervallumon egyenletesen konvergens (azaz mindkét fele egyenletesen konvergens).

4.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1} = ?$$

5. A differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre

$$y^2 \cdot D_1 f(x,y) + x^3 \cdot D_2 f(x,y) = 0.$$

Bizonyítsd be, hogy $f(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) = f(0,0)$.

6. Legyen K kompakt halmaz egy metrikus térben, és $x_1, x_2, \ldots \in K$. Bizonyítsd be, hogy x_n-nek létezik konvergens részsorozata.