10. Valós analízis gyakorlat, 2017. október 19.

10.1. Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ellenőrizzük, hogy $D_1D_2f(0,0) \neq D_2D_1f(0,0)$.

10.2. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény D_1D_2f második parciális deriváltja mindenhol létezik, és sehol sem negatív. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a < b$, $c < d$ számokra $f(a,c) + f(b,d) \geq f(a,d) + f(b,c)$.

10.3. Írjuk fel az xyz függvény második Taylor-polinomját az $(1,2,3)$ pontban.

10.4. Hol van az $x^3 - 3x + xy - xz + y^2 + z^2$ fügvénynek lokális minimuma, illetve maximuma?

10.5. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

$$x^3 + y^3 - 9xy; \qquad \sin x + \sin y + \sin(x+y)$$

10.6. Legyen $f(x,y) = g(x)h(y)$, ahol a $g(x)$ és $h(y)$ függvények n-szer differenciálhatók az a, illetve a b pontban. A $g(x)$ n-edik Taylor polinomja az a pontban legyen $c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n$, a $h(y)$ n-edik Taylor polinomja a b pontban pedig $d_0 + d_1(y-b) + \ldots + d_n(y-b)^n$. Mi az f függvény (a,b)-beli, n-edik Taylor-polinomja?

Házi feladatok

10.7. Bizonyítsuk be, hogy ha D_1D_2f és D_2D_1f is létezik az (a,b) pont egy környezetében, és mindkettő folytonos (a,b)-ben, akkor $D_1D_2f(a,b) = D_2D_1f(a,b)$.

10.8. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény D_1D_2f második parciális deriváltja mindenhol létezik. Mutassuk meg, hogy ha tetszőleges $a < b$, $c < d$ számokra $f(a,c) + f(b,d) \geq f(a,d) + f(b,c)$, akkor D_1D_2f sehol sem negatív.

10.9. Írjuk fel a $\sin(x+y)$ függvény harmadik Taylor-polinomját a $(0,0)$ pontban.

10.10. Határozd meg az $f(x,y) = 2xy + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$ függvény lokális szélsőértékhelyeit.