12. Valós analízis gyakorlat, 2017. október 26.

12.1. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

$$x^3 + y^3 - 9xy; \qquad \sin x + \sin y + \sin(x+y)$$

12.2. Igazoljuk, hogy ha $H \subset \mathbb{R}^p$ konvex és nyílt, és $f : H \to \mathbb{R}$ konvex, akkor f a H minden kompakt részén Lipschitz.

12.3. Mik azok az (x, y) pontok, amelyeknek van olyan környezete, amelyben a $\sin x + \sin(x+y)$ függvény konvex?

12.4. Igazoljuk, hogy ha $f_1, ..., f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható konvex fügvények, akkor a $g(x_1, \ldots, x_p) = f_1(x_1) + \ldots + f_p(x_p)$ függvény is konvex. Ellenőrizzük, hogy a d^2g kvadratikus alak mindenhol pozitív szemidefinit.

12.5. Legyen $|x| < 1$ esetén $u(x)$ a

$$2U^3 + U - 3 = x$$

polinom valós gyöke. Igazoljuk, hogy u differenciálható. $u'(0) =?$

Házi feladatok

12.6. Határozd meg az $f(x, y) = 2xy + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$ függvény lokális szélsőértékhelyeit.

12.7. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. A Lagrange-középértéktételből vezesd le, hogy ha ha tetszőleges pontban

$$\langle f'(x, y, z), (x, y, z)\rangle \geq 0,$$

akkor

$$D_{11}f(0, 0, 0) + D_{22}f(0, 0, 0) + D_{33}f(0, 0, 0) \geq 0.$$

12.8. Legyen $|x - 1| < \frac{1}{10}$, $|y - 2| < \frac{1}{10}$ esetén $u = (u_1, u_2)$ az

$$u_1^4 + u_2^4 - 16 = x, \quad u_1^7 + u_2^7 - 125 = y$$

egyenletrendszernek a $(2, -1)$ ponthoz közelebbi megoldása. Differenciálható-e u a $(1, 2)$ pontban? Ha igen, $u'(1, 2) =?$

12.9. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : H \to \mathbb{R}^p$ kétszer differenciálható, $a \in H$, $b = f(a)$, és tegyük fel, hogy $f'(a)$ invertálható. Tudjuk, hogy f-nek létezik lokális inverze a b pont egy környezetében; legyen ez a lokális inverz függvény g. Igazoljuk, hogy g kétszer differenciálható b egy környezetében. Írjuk fel $g''(b)$-t $f'(a)$ és $f''(a)$ segítségével.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM12.1. Adott egy $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható konvex függvény. Az F minimumát a *konjugált gradiens módszerrel* keressük: veszünk egy x_0-t, majd legyen

$$x_{n+1} = x_n - c(x_n) \cdot \mathrm{grad} f(x_n),$$

ahol a $c(x_n)$ számot az f függvény x_n-beli első és második deriváltjából számítjuk.

(a) Mi legyen $c(x_n)$?

(b) Igazoljuk, hogy a módszer működik másodfokú polinomokra.

(c) Keressünk más elégséges feltételt a módszer működésére.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/

További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu