13. Valós analízis gyakorlat, 2017. november 8.

13.1. Legyen $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$ esetén $u(x, y, z)$ az

$$(2 + x)U^3 + (1 + y)U - (3 + z)$$

polinom valós gyöke. Igazoljuk, hogy u differenciálható. $u'(0, 0, 0) =?$

13.2. Legyen $f : \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható az $(a_1, \dots, a_p, b)$ pontban, és legyen $c = f(a_1, \dots, a_p, b)$. Mutassuk meg, hogy ha $D_{p+1}f(a, b) \neq 0$, akkor az $f = c$ implicit felületnek az $(a_1, \dots, a_p, b)$ pont körüli darabja egy differenciálható $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja.

13.3. Határozzuk meg az $xy = 4$ hiperbola és az $(5, 5)$ pont távolságát a Lagrange-multiplikátor módszerrel.

Házi feladatok

13.4. Legyen $|x_1 - 10| < 1$, $|x_2 - 20| < 1$, $|x_3 - 30| < 1$ esetén $u = (u_1, u_2)$ az

$$U_1 + U_2 = x_1 + x_2 + x_3 - 10, \quad U_1U_2 = \frac{x_1x_2x_3}{10}$$

egyenletrendszernek a $(30, 20)$ ponthoz közelebbi megoldása. $u'(10, 20, 30) =?$

13.5. Legyen $q < p$, $a \in \mathbb{R}^p$ és legyenek $f_1, \dots, f_q$ folytonosan differenciálható függvények az a pont egy környezetében, amelyekre $f_i(a) = 0$ minden i-re, és tegyük fel, hogy a $\operatorname{grad} f_1(a), \dots, \operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok lineárisan függetlenek. Mutassuk meg, hogy az $f_i(x) = 0$ $(i = 1, \dots, q)$ egyenletrendszerrel megadott hiperfelület, valamint a $\operatorname{grad} f_1(a), \dots, \operatorname{grad} f_q(a)$ vektorok által kifeszített vektortér az origóban merőleges egymásra.

13.6. Ellenőrizzük a mértani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget a Lagrange-multiplikátor módszerrel.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM13.1. Legyen $H \subset \mathbb{R}^{p+1}$, $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in \operatorname{int} H$ és $f : H \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az (a, b) pontban, továbbá tegyük fel, hogy $f(a, b) = 0$ és $D_{p+1}f(a, b) \neq 0$. Igazoljuk, hogy az $f(x, \varphi(x)) = 0$ $(\varphi(a) = b)$ egyenlettel megadott φ implicit függvény kétszer differenciálható az a pontban, és írjuk fel a második deriváltját.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu