14. Valós analízis gyakorlat, 2017. november 9.

14.1. Határozzuk meg xyz legnagyobb értékét az $x+y+z=5$, $x^2+y^2+z^2=9$ feltételek mellett.

14.2. Legyen M szimmetrikus $n \times n$-es mátrix.
(a) Mely v egységvektorok esetén lesz v^tMv minimális, illetve maximális?
(b) Melyik a leghosszabb, illetve a legrövidebb azon v vektorok közül, amikre $v^tMv = 1$?

14.3. Legyen A és B két $n \times n$-es valós szimmetrikus mátrix, $\det A \neq 0$.
(a) Bizonyítsd be, hogy ha $x_0 \in \mathbb{R}^n$ feltételes lokális szélsőértékhelye az $x \to x^tBx$ függvénynek az $x^tAx = 1$ feltétel mellett, akkor x_0 sajátvektora az $A^{-1}B$ mátrixnak.
(b) Mi a jelentése az x_0 sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek?

14.4. Adottak a térben a $p_1, \dots, p_n$ pontok. Tekintsük azt az origón átmenő síkot, amire a pontok és a sík távolságainak négyzetösszege minimális. Legyen a sík normálvektora v, ahol $|v| = 1$.
(a) Igazold, hogy v sajátvektora a $\sum_{i=1}^{n} p_i p_i^t$ mátrixnak.
(b) Mi a geometriai jelentése a v-hez tartozó sajátértéknek?

Házi feladatok

14.5. Határozd meg x^2+yz+z legkisebb és legnagyobb értékét az $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ halmazon.

14.6. Határozzuk meg az $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$ feltételek mellett $x+y+z$ legnagyobb lehetséges értékeit.

14.7. Adottak a térben a $p_1, \dots, p_n$ pontok. Tekintsük azt az origón átmenő egyenest, amire a pontok és az egyenes távolságainak négyzetösszege minimális. Legyen az egyenes irányvektora v, $|v| = 1$.
Igazold, hogy v sajátvektora a $\sum_{i=1}^{n} p_i p_i^t$ mátrixnak.

14.8. Egy $(\mathbf{p}_i)_{i=1}^N \subset \mathbb{R}^3$ véges ponthalmazra gömbfelületet szeretnénk illeszteni. A gömb egyenletét $f(\mathbf{x}) = a|\mathbf{x}|^2 + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle + c = 0$ alakban írjuk fel, ahol $|\mathbf{b}|^2 + 4ac = 1$. Olyan együtthatókat keresünk, amelyekre

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(\mathbf{p}_i)\big)^2 = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b}^t & c \end{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}_i|^2 \\ \mathbf{p}_i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{p}_i|^2 & \mathbf{p}_i^t & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ \mathbf{b} \\ c \end{pmatrix}$$

minimális.
Mutassuk meg, hogy a feladat egy 5-dimenziós sajátértékfeladatra vezet.