16. Valós analízis gyakorlat, 2017. november 23.

16.1. Konstruáljunk olyan $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmazt, amire $b(H) = 1$ és $k(H) = 2$.

16.2. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz. Igazak-e a következő állítások? (Bizonyítsuk be, vagy mutassunk ellenpéldát.)

(a) Ha $k(H) = 0$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(b) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\partial H \in \mathcal{J}$.
(c) Ha $\partial H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(d) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$.
(e) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$.
(f) Ha $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$, és $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$.

16.3. Legyen $A, B \subset \mathbb{R}^p$ két diszjunkt, korlátos halmaz. Rakjuk sorba nagyság szerint a következő mennyiségeket:

$$k(A \cup B); \qquad b(A \cup B); \qquad k(A) + k(B); \qquad b(A) + b(B); \qquad k(A) + b(B); \qquad b(A) + k(B).$$

16.4. Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ Jordan-mérhető halmazok az egységkockában, és tegyük fel, hogy a mértékeik összege nagyobb, mint m. Bizonyítsd be, hogy van olyan nyílt gömb, amely a halmazok közül több, mint m-nek részhalmaza.

16.5. Legyen $A \subset [a, b]$ Jordan-mérhető $\mathbb{R}$-ben. Kössük össze A minden pontját egy adott síkbeli ponttal. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott szakaszok uniója Jordan-mérhető a síkban. Mennyi a területe?

16.6. Létezik-e differenciálható Peano-görbe? (Azaz, olyan $[0, 1] \to \mathbb{R}^2$ differenciálható leképezés, amelynek értékkészlete tartalmazza $[0, 1]^2$-et.)

Házi feladatok

16.7. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz. Igazak-e a következő állítások?

(a) Ha $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(b) Ha H zárt, és $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$.
(c) Ha H nyílt, és $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$.
(d) Ha $k(\operatorname{int} H) = b(\operatorname{cl} H)$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(e) $\partial H \in \mathcal{J}$.
(e) $\partial\partial H \in \mathcal{J}$.

16.8. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset B \subset \mathbb{R}^p$ és B Jordan-mérhető, akkor

$$t(B) = k(A) + b(B \setminus A).$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy egy $A \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha bármely $B \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmazra

$$k(B) = k(B \cap A) + k(B \setminus A).$$

16.9. Legyenek $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ korlátos halmazok. Igazak-e a következő állítások?

(a) $k^{(p+q)}(A \times B) = k^{(p)}(A) \cdot k^{(q)}(B)$?
(b) $b^{(p+q)}(A \times B) = b^{(p)}(A) \cdot b^{(q)}(B)$?
(c) Ha A és B mérhető, akkor $A \times B$ is mérhető, és $t^{(p+q)}(A \times B) = t^{(p)}(A) \cdot t^{(q)}(B)$?

16.10. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$-ben tetszőleges $0 \le c \le d < \infty$-hez létezik olyan kompakt halmaz, aminek belső mértéke c, külső mértéke d.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM16.1. Legyen $\mathcal{R}$ halmazgyűrű és $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ szubadditív halmazfüggvény, amire $\mu(\emptyset) = 0$ is teljesül. Nevezzünk egy $A \in \mathcal{R}$ halmazt μ-mérhetőnek, ha bármely $B \in \mathcal{R}$ esetén $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$. Bizonyítsuk be, hogy a μ-mérhető halmazok $\mathcal{R}$-nek egy részgyűrűjét alkotják, és ezen a részgyűrűn μ additív, azaz tetszőleges A, B diszjunkt, μ-mérhető halmazokra $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

PM16.2. Bizonyítsd be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^3$ korlátos halmaz, akkor az

$$A + [-1, 1]^3 = \{a + b : \ a \in A, \ |b_1| \le 1, \ |b_2| \le 1, \ |b_3| \le 1\}$$

halmaz Jordan-mérhető.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu