18. Valós analízis gyakorlat, 2017. november 30.

18.1. Mekkora egy homogén sűrűségeloszlású, tömör kocka tehetetlenségi nyomatéka valamelyik lap tengelye körül?

18.2.

$$\int_0^1 \int_0^x y^2 e^x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^{\pi/2} \left(\int_x^{\pi/2} \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = ?$$

18.3. Egy háromszög csúcsai $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ és $C = (0, m)$. Legyen tetszőleges $(x, y) \in [0, 1]^2$-re

$$f(x, y) = (1 - x)(1 - y) \cdot A + x(1 - y) \cdot B + y \cdot C.$$

Számítsuk ki a háromszög területét mértéktranszformációval.

18.4. Számítsuk ki a $\beta - 90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ - \gamma$, $0 \leq r \leq \dfrac{m}{\cos \varphi}$ halmaz területét.

18.5. Hol van egy egységnyi sugarú, homogén sűrűségeloszlású, tömör félgömb súlypontja?

18.6. Egy számítógépes kísérlethez független, normális eloszlású véletlen számokra van szükségünk. A rendelkezésünkre álló véletlenszám-generátor egyenletes eloszlású, független (ál)véletlen számokat biztosít. Hogyan készíthetünk két független, $(0, 1)$-beli egyenletes eloszlású véletlen számból két független, normális eloszlású véletlen számot? (A normális eloszlás sűrűségfüggvénye $\varrho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, ami azt jelenti, hogy ha ξ normális eloszlású valószínűségi változó, akkor bármely $I \subset \mathbb{R}$ intervallumra $P(\xi \in I) = \int_I \varrho$.)

Házi feladatok

18.7.

$$\int_0^1 \left(\int_{y^{2/3}}^1 y \cos x^2 \, dx \right) dy = ?$$

18.8. Igazold, hogy ha $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\int_0^1 \int_0^1 f(xy) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 f(t) \log \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t.$$

18.9. Hol van az $0 \leq r < 1 - \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ halmaz súlypontja?

18.10. Számítsd ki az $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \, |z| \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}}\}$ halmaz Jordan-térfogatát.

18.11. Bizonyítsuk be, hogy ha $f > 0$ a pozitív Jordan-mértékű $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, akkor $\overline{\int}_A f \, dx > 0$.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM18.1. Minden folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre legyen $J_0 f = f$, és $a \geq 0$ esetén legyen $J_a f$ az a függvény, amire

$$(J_a f)(x) = \int_0^x f(t) \frac{(x - t)^{a-1}}{\Gamma(a)} \, \mathrm{d}t.$$

Igazoljuk, hogy (a) $(J_1 f)(x) = \int_0^x f$; (b) $J_{a+1} = J_1 J_a$; (c) $J_{a+1} = J_a J_1$; (d) $J_{a+b} = J_a J_b$.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu