Valós analízis ZH, 2017. december 6.

Minden beadott lapra írd rá a nevedet.

A feladatok nem, vagy nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek. A feladatokat tetszőleges sorrendben kidolgozhatod.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

Végeredmény közlése önmagában nem elegendő (0 pont), megfelelő indoklás szükséges. Az előadáson szerepelt tételeket, illetve a gyakorlaton bizonyított állításokat bizonyítás nélkül felhasználhatod, ha pontosan idézed. Egyéb állításokra nem elég hivatkozni, hanem bizonyítást is kell adni, a tanult anyag felhasználásával.

Törekedj a rendezett, áttekinthető, világos, jól olvasható leírásra. Csak arra adok pontot, amit nagyítóval is el tudok olvasni.

Semmilyen segédeszköz sem használható, **számológép sem**.

1.

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3}\, dx \right) dy = ?$$

2. Határozd meg $x - y + 3z$ legnagyobb és legkisebb értékét az $x^2 + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{3} = 1$ ellipszoidon.

3. Hol van lokális szélsőértékhelye az $xy^2(x+y+1)$ függvénynek?

4. Mekkora egy homogén sűrűségeloszlású, tömör kúp tehetetlenségi nyomatéka a tengelye körül, ha a tömege m, és az alapkörének sugara R?

(Ha egy test az $m_1, \dots, m_N$ tömegű atomokból áll, és ezek távolsága a t egyenestől rendre $r_1, \dots, r_N$, akkor a testnek a t tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$.)

5. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető halmaz, és legyen $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$ esetén $A + \mathbf{d} = \{\mathbf{x} + \mathbf{d} : \mathbf{x} \in A\}$ az A eltoltja a $\mathbf{d}$ vektorral. Igazold, hogy

$$\lim_{\mathbf{d} \to \mathbf{0}} t\Big((A + \mathbf{d}) \setminus A\Big) = 0.$$

6. Legyen $|x| < 1$ esetén $u(x)$ az

$$(2+x)u^5 + (1+x)u - (3+x)$$

polinom egyetlen valós gyöke. Igazold, hogy u kétszer differenciálható a 0 pontban. $u''(0) = ?$

7. Igaz-e, hogy ha egy $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény minden vízszintes és minden függőleges szakaszon monoton, akkor integrálható?