19. Valós analízis gyakorlat, 2017. december 7.

19.1. Folytonos-e az $f(t) = \int_1^t e^{x^2 t}\,\mathrm{d}x$ függvény? Differenciálható-e? Mi a deriváltja?

19.2. Legyen $a \in \mathbb{R}$. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \cos(ax)\,\mathrm{d}x = ?$

19.3. Az $f : [-a, a] \to [0, 1]$ folytonos függvény egyetlen maximuma $f(0) = 1$, a függvény a 0-ban kétszer differenciálható, és $f''(+0) = -c < 0$. Hasonlítsuk össze f-et az $e^{-\frac{c}{2}x}$ függvénnyel, és keressünk aszimptotikus becslést az $\int_{-a}^{a} f^n$ sorozatra.

19.4. Az Euler-féle Béta-függvényt így definiáljuk:

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,\mathrm{d}x, \quad \text{ha } s,t > 0.$$

(a) Keressünk összefüggéseket $B(s,t)$, $B(s+1,t)$, $B(s,t+1)$ stb. között.

(b) Igazoljuk, hogy a Béta-függvény akárhányszor differenciálható, és írjuk fel a parciális deriváltjait paraméteres integrál alakban.

19.5. A Gamma-függvény definíciójában helyettesítsünk $x = \frac{y^2}{2}$-t. Igazoljuk, hogy

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = B(u,v)\Gamma(u+v).$$

19.6. A Hölder-egyenlőtlenségből vezessük le, hogy a $\log\Gamma$ függvény szigorúan konvex $(0,\infty)$-n. (Avagy, a Γ-függvény "log-konvex".)

Házi feladatok

19.7. Differenciálható-e az $f(t) = \int_1^t \int_1^t e^{xyt}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ $(t > 1)$ függvény? Mi a deriváltja?

19.8. (a) Igazoljuk, hogy az

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

paraméteres integrál egyenletesen konvergens $t \geq 0$ esetén. (Integráljunk parciálisan.)

(b)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

19.9. Legyen $c > 0$. Fejezzük ki az $\int_0^\infty e^{-x^c}\,\mathrm{d}x$ integrál értékét a Γ-függvénnyel.

19.10. Legyen

$$f(s) = \frac{4^s \cdot \Gamma(s) \cdot \Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(2s)}.$$

(a) Bizonyítsuk be, hogy f periodikus.

(b) Bizonyítsuk be, hogy f-nek van határértéke ∞-ben, és számítsuk ki. (Használjuk a Stirling-formulát.)

(c) Mondjuk ki az eredményt: $\Gamma(s) \cdot \Gamma(s+\frac{1}{2}) = \ldots\ldots\ldots \cdot \Gamma(2s)$ ha $s > 0$.

(d) Általánosítsuk az eredményt $\frac{1}{2}$ helyett $\frac{1}{n}$-nel.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM19.1. Bizonyítsuk be a Stirling-formulát:

$$\Gamma(s) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{s}}\left(\frac{s}{e}\right)^s, \quad \text{ha } s \to \infty$$

abból, hogy

$$\Gamma(s) = \left(\frac{s}{e}\right)^s \int_0^\infty \left(t \cdot e^{-(t-1)}\right)^s \mathrm{d}t.$$

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/

További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu