20. Valós analízis gyakorlat, 2017. december 13.

20.1. Legyen $g(t) = (1, t, t^2)$ $(t \in [0,1])$ és $f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$. Számítsuk ki a következő vonalintegrálokat:

$$\int_g f_1 \ \mathrm{d}x_2 \qquad \int_g < f, \ \mathrm{d}\mathbf{x} > \qquad \int_g f \times \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Melyik integrált számíthatjuk ki közvetlenül a valós vonalintegrálokra vonatkozó Newton-Leibniz formulából?

20.2. Egy ρ homogén töltéssűrűségű egyenes által létrehozott elektromos térerősség iránya merőleges az egyenesre, nagysága az egyenestől d távolságban $2k\rho/d$. Mekkora a feszültség két pont között?

20.3. Melyik függvénynek van primitív függvénye? Ha van, írjuk is fel! Ha nincs, mutassunk példát olyan zárt görbére, amelyen a vonalintegrál nem tűnik el!

$$(x,y) \qquad (y,x) \qquad \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad (\operatorname{ch} y; x \operatorname{sh} y) \qquad (\operatorname{ch} x; y \operatorname{sh} x)$$

20.4. Mik azok a differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, amire a következő állítás teljesül? Ha g egyszerű, zárt, rektifikálható görbe $\mathbb{R}^2$-ben, akkor

$$(a) \quad \int_g x^2 y^3 \ \mathrm{d}y = \int_g f(x,y) \ \mathrm{d}x; \qquad (b) \quad \int_g e^x \cos y \ \mathrm{d}x = \int_g f(x,y) \ \mathrm{d}y.$$

Házi feladatok

20.5. Legyen $g(t) = (t, t^2)$ $(t \in [0,1])$. Számítsd ki a következő vonalintegrálokat:

$$\int_g \cos x \ \mathrm{d}y \qquad \int_g < (e^x \cos x, e^x \sin y), \mathrm{d}\mathbf{x} >$$

Melyik integrált számíthatjuk ki közvetlenül a valós vonalintegrálokra vonatkozó Newton-Leibniz formulából?

20.6. A Biot-Savart törvény szerint, ha egy kicsi $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ vezetékdaraban I áram folyik, akkor a p pontban, ahonnan a vezetékdarabba az $\overrightarrow{r}$ vektor mutat, ez

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \, \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \times \overrightarrow{r}}{\left|\overrightarrow{r}\right|^3}$$

nagyságú mágneses indukciót hoz létre.

Tekintsük egy R sugarú körvezetőt, amiben I áram folyik. Számítsd ki a mágneses indukciót a kör tengelyén, valamint a kör síkjában, a kör belsejében és külsejében.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM20.1. Legyen $H = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,0) : \ x^2 + y^2 = 1\}$. Mutass példát olyan differenciálható, rotációmentes $H \to \mathbb{R}^3$ függvényre, aminek nincs primitív függvénye.

PM20.2. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos, és minden tengelypárhuzamos téglalap kerületén eltűnik a vonalintegrálja, akkor f-nek van primitív függvénye.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu