21. Valós analízis gyakorlat, 2017. december 14.

21.1. Legyen $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,x,x) : x \in \mathbb{R}\}$. Keressünk olyan differenciálható $G \to \mathbb{R}^3$ vektormezőt, ami rotációmentes (azaz a ,,keresztbe vett" parciális deriváltjai megegyeznek), de nincs primitív függvénye.

21.2. Az $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ vektormező akárhányszor differenciálható, rotációmentes, és az origó egy pontozott környezetében korlátos. Bizonyítsuk be, hogy van primitív függvénye.

21.3. Melyik halmaz egyszeresen összefüggő?

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \qquad \mathbb{R}^3 \setminus \{t,0,0) : t \in \mathbb{R}\} \qquad \mathbb{R}^4 \setminus \{t,0,0,0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{(\cos t, \sin t, 0) : t \in \mathbb{R}\} \qquad \mathbb{R}^4 \setminus \{(\cos t, \sin t, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

21.4. Az $F \subset \mathbb{R}^3$ konvex sokszöget a g zárt, irányított töröttvonal határolja. A síklap jobbkézszabály szerint irányított területvektora $\vec{A}$. Igazoljuk, hogy

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \int_g \mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM21.1. Egyszeresen összefüggő-e a $H = \mathbb{R}^3 \setminus \{(\cos t, \sin t, e^t) : t \in \mathbb{R}\}$ halmaz?

PM21.2. Legyen g és h két zárt, folytonos, rektifikálható görbe $\mathbb{R}^3$-ban, amiknek nincs közös pontja. Mint tanultuk, a két görbe Gauss-féle összehurkolódási(?) számát (linking number) a következő kétszeres vonalintegrál adja meg:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{x \in g} \int_{y \in h} \frac{\langle x - y;\ \mathrm{d}x \times\ \mathrm{d}y \rangle}{|x-y|^3}.$$

Mi az $\dfrac{\langle x - y;\ \mathrm{d}x \times\ \mathrm{d}y \rangle}{|x-y|^3}$ kifejezés geometriai jelentése? Miért éppen 4π-vel kell osztani?

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017osz-an3/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu