Emlékeztető az Analízis 4 előadásokról (2017. tavasz)

(Utolsó módosítás: 2017. május 21., 16:45)

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.

1. előadás, február 14.

[LTS2, 177–184. o.]

Felidéztük, mit is tanultunk középiskolában a munka, erőtér, potenciál, útfüggetlenség, örvénymentesség fogalmairól. Példák: térerősség és potenciál homogén gravitációs tér (földközelben), tömör gömb (földgolyó), pontszerű töltés elektrosztatikus mezeje.

Egy darabig, ahol nem mondjuk, $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt tartomány lesz. Az $G \to \mathbb{R}$ és $G \to \mathbb{R}^p$ leképezéseket "skalármezőknek", illetve "vektormezőknek" fogjuk hívni.

Röviden, bizonyítás nélkül megbeszéltük az $\mathbb{R}^p$-beli görbék néhány alaptulajdonságát: folytonosság, differenciálhatóság, folytonos differenciálhatóság, átparaméterezés, megfordítás, zártság, hossz, rektifikálhatóság. A görbe deriváltjait pontozással fogjuk jelölni: $\dot{\gamma}$, $\ddot{\gamma}$. Az összes görbe, amivel foglalkozni fogunk, folytonos lesz. Kimondtuk, hogy egy γ folytonos görbe akkor és csak akkor rektifikálható, ha minden koordinátafüggvénye KV; ha γ folytonosan differenciálható, illetve ha γ differenciálható, és $\dot{\gamma}$ integrálható, akkor $\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}|$.

Definiáltuk a valós vonalintegrált és a $\int_\gamma h \ \mathrm{d}x_i$ vonalintegrálokat. Megbeszéltük, hogy ha γ rektifikálható, és f folytonos, akkor a $\int_\gamma f_i \ \mathrm{d}x_i$ integrálok léteznek, és a vonalintegrál is létezik. Bebizonyítottuk, hogy ha $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható, és f folytonos, akkor $\int_g \langle f, \ \mathrm{d}x \rangle = \int_a^b \langle f \circ \gamma, \dot{\gamma} \rangle$. Végül kimondtam, hogy ha $* : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^s$ bilineáris leképezés (valamilyen szorzás), $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható, és f folytonos, akkor $\int_g f * \ \mathrm{d}x = \int_a^b (f \circ \gamma) * \dot{\gamma}$.

Kiszámoltuk a $(-y, x)$ vonalintegrálját az egységkörvonalon.

Definiáltuk vektormező primitív függvényét, kimondtuk és bebizonyítottuk a Newton–Leibniz formulát valós vonalintegálokra.

2. előadás, február 15.

[LTS2, 184–194. o.]

Definiáltuk a potenciálfüggvény és a konzervatív vektormező fogalmát. A NL formula következménye, hogy a primitív függvények csak egy konstansban különözhetnek egymástól.

Kimondtuk, hogy $\int(f+g) = \int f + \int g$, valamint bebizonyítottuk a triviális becslést: $\left| \int_\gamma \langle f(x), \ \mathrm{d}x \rangle \right| \le \sup |f| \cdot \ell(\gamma)$.

Elkezdtük a primitív függvény létezésének feltételeit. A múlt órai példából már tudjuk, hogy nincs minden vektormezőnek primitív függvénye.

Bebizonyítottuk, hogy ha $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt, és $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos, akkor a következők ekvivalensek: (a) f-nek létezik primitív függvénye; (b) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt, folytonos, rektifikálható görbén; (c) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt töröttvonalon.

Megbeszéltük, hogy a $(\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2})$ függvénynek nincs globálisan primitív függvénye, mert az egységkörön az integrálja nem nulla. Másrészt ez a függvény a $\mathrm{szög}(x,y)$ deriváltja, tehát minden pont körül van lokális primitív függvénye. Ha a negatív félegyenest elhagyjuk, akkor már van primitív függvény.

Differenciálható f esetén volt a szükséges feltétel, hogy f' minden pontban szimmetrikus. A feltételt szavakban sokféleképpen mondhatjuk: a "keresztbe vett parciális deriváltak megyegyeznek", vagy "a vektormező rotációmentes". (A rotáció valami olyasmi lesz, hogy az összes $D_j f_i - D_i f_j$ kommutátort berakjuk egy struktúrába, ezt majd jövő héten megbeszéljük. Tehát most még nincs "rotáció", de már bátran használhatjuk a "rotációmentes" szót.) A $(\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2})$ példája is mutatja, hogy ez a feltétel nem mindig elégséges.

Volt, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, akkor az $f(x) = Ax$-nek akkor és csak akkor van primitív függvénye, ha A szimmetrikus; egy primitív függvény az $\frac{1}{2}x^T Ax$. A konstans v vektor függvénynek is van primitív függvénye, az $\langle v, x\rangle = v^T x$.

Kimondtuk és bebizonyítottuk a Goursat-lemmát valós vonalintegrálokra. Bebizonyítottuk, hogy ha $G \subset \mathbb{R}^p$ konvex nyílt, $f : G \to \mathbb{R}^p$ differenciálható vektormező, és ha f' szimmetrikus a G minden pontjában, akkor f-nek létezik primitív függvénye. Ebből következik, hogy rotációmentes vektormezőnek minden pont körül létezik lokális primitív függvénye. Definiáltuk a csillagszerű tartományokat, és kimondtuk és biznyítottuk az előbbi tételt konvex helyett csillagszerű tartományra is. Ha a síkból elhagyjuk a negatív félegyenest, akkor a maradék csillagszerű, és ezen a $(\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2})$ függvénynek van primitív függvénye (a szög). Az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tartományon viszont nincs globális primitív függvény; az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tartomány valamiért lényegesen más...

3. előadás, február 21.

[LTS2, 194–198. o.]

Megbeszéltük, hogy ha lokálisan minden pont körül létezik valamekkora gömbben primitív függvény, akkor a vonalintegrált nem rektifikálható görbékre is kiterjeszthetjük úgy, hogy sok kis görbedarabra alkalmazzuk a Newton–Leibniz formulát, és ezeket összeadjuk. (Ez nincs benne a tankönyvben.)

Definiáltuk a homotóp tulajdonságot közös kező- és végpontú görbékkel és zárt görbékkel, valamint a nullhomotóp tulajdonságot. Bebizonyítottuk, hogy rotációmentes vektormező vonalintegrálja homotóp görbéken ugyanaz, nullhomotóp görbéken 0. Definiáltuk az egyszeres összefüggőséget, bebizonyítottuk, hogy egyszeresen összefüggő tartományon ha egy folytonos vektormezőnek minden pont körül létezik lokális primitív függvénye, akkor a teljes tartományon létezik primitív függvény, illetve egyszeresen összefüggő tartományon minden differenciálható, rotációmentes vektormezőnek van primitív függvénye.

Az utolsó 20 percben a vonalintegrál és a homotópia egy alkalmazásaként felírtam a Biot-Savart törvényt (gerjesztési törvényt): ha egy kicsi $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ vezetékdaraban I áram folyik, akkor eg yolyan pontban, ahonnan a vezetékdarabba az $\mathbf{r}$ vektor mutat, ez az áramdarab $\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \cdot \dfrac{I\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ nagyságú mágneses indukciót hoz létre. Ha ezt egy γ_1 görbe mentén futó zárt vezetőre alkalmazzuk, és felírjuk egy másik, az elsővel N-szer összehurkoló γ_2 görbén (tipikusan γ_1 egy N-menetű tekercs) a mágneses örvényerősséget, és ezt összevetjük az Ampère-törvénnyel (IV. Maxwell-egyenlet), azt kapjuk, hogy

$$\mu_0 NI = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathbf{x}\in\gamma_1} \int_{\mathbf{y}\in\gamma_2} \frac{\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathrm{d}\mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{y}\rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3}.$$

Az

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{x}\in\gamma_1} \int_{\mathbf{y}\in\gamma_2} \frac{\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathrm{d}\mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{y}\rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3}.$$

kettős vonalintegrál neve Gauss féle összekapcsolódási(?) szám (linking number). Ez mindig egész szám, és nem változik, ha a görbéket folytonosan deformáljuk úgy, hogy közben a két görbének nincs közös pontja. Ezzel precíz bizonyítást adhatunk arra, hogy az összefűzött láncszemeket nem lehet folytonos deformációval szétszedni.

A linking number bonyolultab esetekben is értelmes, például ha egymást össze-vissza kerülgető csomókról van szó.

4. előadás, február 22.

[LTS2, 200–210. o.]

Megvoltak a síkbeli integráltételek és a hozzávaló definíciók: egyszerű zárt görbe, Jordan-görbetétel (bizonyítás nélkül), irányított szög, síkvektorok keresztszorzata, görbeindex, egyszerű zárt görbe irányítása, Green-tétel (bizonyítás csak olyan Jordan-tartományokra, amiket össze lehet ragasztani normáltartományokból, pl. az összes sokszög). A Green-tételből is következik, hogy egyszerű zárt görbén, aminek a belsejében is rotációmentes egy vektormező, a vonalintegrál 0.

Definiáltuk az ívhossz szerinti integrált mint az ívhoszfüggvény szerinti Stieltjes integrált (ez más, mint a könyvbeli definíció, de ekvivalens vele), a külső normálist, és a Green-tételből levezettük a Newton–Leibniz formula síkbeli változatát: Ha $\mathrm{cl}(K) \subset G \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő Jordan-tartomány, aminek a határa pozitív irányítású, rektifikálható görbe, és $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor $\int_K \mathrm{grad}\, f \;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y = \int_{\partial K} fn \;\mathrm{d}s$. Elmondtam a kertünkben feltörő és örvénylő talajvízről szóló szemléltetésteket, definiáltuk 2-dimenzióban a divergenicát és a rotációt, kimondtuk és bebizonyítottuk a Gauss-Osztrogradszkij tételt és a Stokes-tételt: ha $\mathrm{cl}(K) \subset G \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő Jordan-tartomány, aminek a határa pozitív irányítású, rektifikálható görbe, és $f : G \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható, akkor $\int_K \mathrm{div}\, f \;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y = \int_{\partial K} \langle f, n\;\mathrm{d}s\rangle$, illetve $\int_K \mathrm{rot}\, f \;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y = -\int_{\partial K} f \times n \;\mathrm{d}s$. (A könyv második kiadásában nem szerepel a gradiens és a rotáció integrálja.)

5. előadás, február 28.

[LTS2, 211–221. o.]

Definiáltuk az $S : P \to \mathbb{R}^3$ paraméteres felületeket, ezen belül a folytonos, differenciálható, folytonosan differenciálható, darabonként folytonosan differenciálható felületeket. Megbeszéltük, hogy a felszínt nem lehet egyszerűen a beírt poligonok felszínének szuprémumaként definiálni (ld. hengerbe beírt lampion).

A darabonként folytonosan differenciálható felületekre definiáltuk a normálvektort, a $\overrightarrow{\mathrm{d}A} = D_1 S \times D_2 S$ területelem-vektort és a $|\mathrm{d}A|$ felszínelemet, a felszínt, felírtuk kétváltozós függvény felszínét, folytonos függvények $\int_S f |\mathrm{d}A|$ felszín szerinti integrálját és a sokféle felületi jelegű $\int_S f * \overrightarrow{\mathrm{d}A}$ integrálját (a $*$ bármilyen szorzás lehet), közte "a" $\int_S \langle f, \overrightarrow{\mathrm{d}A}\rangle$ felületi integrált is. Mondtam, meg lehetne kérdezni, mi történik a felület átparaméterezésnél, de inkább nem nézzük meg.

Kimondtam egy lemmát, ami a Green-tétel három-dimenziós változatának is tekinthető: ha $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és a normálvektor mindig kifelé mutat, továbbá $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, végül $i \in \{1, 2, 3\}$, akkor $\int_K D_i f \;\mathrm{d}V = \int_{\partial K} f \;\overrightarrow{\mathrm{d}A}_i$. A lemmát csak szép normáltartományokra bizonyítottuk, meg mindenre, ami ilyenekből összeragasztható, például poliéderekre.

A lemmából bebizonyítottuk a Newton–Leibniz formulát: ha $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor $\int_K \mathrm{grad}\, f \;\mathrm{d}V = \int_{\partial K} f \;\overrightarrow{\mathrm{d}A}$. Az $f \equiv 1$ esetből kipotyog, hogy a krumpli héján $\int \overrightarrow{\mathrm{d}A} = 0$. Ezután definiáltuk a divergenciát és bebizonyítottuk a Gauss-Osztrogradszkij tételt: ha $f : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor $\int_K \mathrm{div}\, f \;\mathrm{d}V = \int_{\partial K} \langle f, \overrightarrow{\mathrm{d}A}\rangle$, definiáltuk a rotációt és bebizonyítottuk a Stokes-tételt: $\int_K \mathrm{rot}\, f \;\mathrm{d}V = -\int_{\partial K} f \times \overrightarrow{\mathrm{d}A}$. A divergenciáról és a rotációról is kimondtam bizonyítás nélkül, hogy nem függnek a koordinátatengelyek irányától.

Röviden elmeséltem, hogy a Gauss-Osztrogradszkij tétel szerint divergenciamentes vektormezőnek minden szép krumpli határán nulla a felületi integrálja. Ez lehetőséget ad a primitív függvényről szóló fejezet általánosítására: meg lehetne csinálni a Goursat-lemma felületi integrálokról szóló variánsát, és bebizonyítani, hogy minden nullhomotóp zárt felületen (vagy akár csak poliéderen) nulla a felületi integrál. Ezzel az eszközzel be tudjuk bizonyítani például azt, hogy $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ nem homeomorf $\mathbb{R}^3$-bel.

Végül bizonyítás nélkül kimondtam a Kelvin-Stokes tételt: ha $S \subset G$ egy irányított, peremes felület, ami mondjuk darabonként folytonosan differenciálható, a határa pedig rektifikálható, valamint $f : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható vektormező, akkor $\int_S \langle \mathrm{rot}\, f, \overrightarrow{\mathrm{d}A}\rangle = \int_{\partial S} \langle f, \;\mathrm{d}x\rangle$.

Az utolsó 6–7 percben kiosztottam kinyomtatva a Maxwell-egyenleteket, és megbeszéltük, hogy a differenciális és integrális alakok között mi a kapcsolat: az I. és III. egyenletnél a Gauss-Osztrogradszkij tétel, a II. és IV. egyenletnél a Kelvin-Stokes tétel.

Ezzel befejezzük az integráltételeket; holnap elkezdjük a mértékelméletet.

6. előadás, március 1.

[Petruska, 51–52. o.]

Bebizonyítottuk az álomgyilkos tételt: nem létezik pozitív, normált, eltolásinvariáns, szigma-additív függvény $\mathcal{P}(x)$-en. Ezután definiáltuk a Lebesgue-féle külső mértéket úgy, hogy nyílt téglákkal fedünk, és a belső mértéket, mint a komplementum külső mértéke komplementumának kockánként vett összegét. Elmondtam, hogy a mérhetőséget a külső és a belső mértékek egyenlőségével is lehetne definiálni, de inkább mélyen hallgatni fogunk a belső mértékről, és a szokásos módon, kettévágással definiáljuk. Bebizonyítottuk, hogy a külső mérték monoton és szubadditív, sőt szigma-szubadditív, az üres halmaz külső mértéke 0, és kompakt halmazok külső mértéke ugyanaz, mint a külső Jordan-mértéke. Bizonyítás nálkül kimondtam, hogy a Lebesgue-mérhető halmazok szigma-algebrát alkotnak, és ezen a Lebesgue-mérték szigma-additív.

Ezek után a Petruskából két oldalra volt idő: definiáltuk halmazrendszer megszorítását, halmazfüggvényekre a monoton, additív, szigma-additív tulajdonságokat, halmazalgebrát, szigma-algebrát, gyűrűt, szigma-gyűrűt, modulust és félgyűrűt. Bebizonyítottuk, hogy mindig van generált algebra, szigma-algebra, gyűrű, szigma-gyűrű, illetve modulus. Végül felírtam, hogy a nyílt halmazok által generált szigma-algebra elemeit hívjuk Borel-halmazoknak.

7. előadás, március 7.

[Petruska, 52–56. o.]

A könyvet követve volt: mérhető tér, mérhető függvények, a mérhetőség különböző ekvivalens feltételei félegyenesek őseképeivel, mérhető függvények kompozíciója, összege, szorzata stb., megszámlálható sok mérhető függvény pontonként szuprémuma, infimuma, liminfje, szuprémuma, a konvergenciahalmaz mérhetősége. Továbbá: mérték, megszámlálható unió, metszet és limesz, egyszerű függvények, egyszerű függvények integrálja, nemnegatív mérhető függvények integrálja.

Elmondtam, hogy ez az integrálfogalom az alsó integrált terjeszti ki. Lehet ugyanígy felső integrált is csinálni, de a felső összegekhez az egyszerű függvények nem elegek, helyettük olyan függvényeket kell használnunk, amelyek megszámláljató sok értéket vesznek fel; ezekek hívhatjuk mondjuk szigma-egyszerű függvényeknek is. Mérthető függvényekre az így kapott alsó és felső integrál érték megegyezik.

Végül megvolt a 11.5. lemma.

8. előadás, március 8.

[Petruska, 57–59. o.]

Megvolt a monoton konvergencia tétel, az integrál alaptulajdonságai és a Fatou-lemma. Illusztrációnak megbeszéltük, mit mondanak ezek a tételek akkor, ha az alaphalmaz $\{1, 2\}$ vagy $\mathbb{N}$, a mérték pedig a számlálómérték. Definiáltuk az integrált valós és komplex értékű függvényekre, és felírtuk újra az alaptulajdonságokat és a háromszög-egyenlőtlenséget. Végül defniáltuk az $\mathcal{L}_1(X, \mathcal{M}, \mu)$ teret, a normát és bebizonyítottuk, hogy $\mathcal{L}_1$-beli függvénysorozat pontonkénti limesze is $\mathcal{L}_1$-beli.

9. előadás, március 14.

[Petruska, 59–63. o.]

Felírtuk a kis Lebesgue-/korlátos konvergencia tételt, a nagy Lebesgue-/dominált konvergencia tételt, valamint a Fatou-Lebesgue tételt: ha $|f_n| \in g \in \mathcal{L}_1$ mérhetőek, akkor

$$\int_X (\underline{\lim}\, f_n)\, \mathrm{d}\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n\, \mathrm{d}\mu \le \overline{\lim} \int_X f_n\, \mathrm{d}\mu \le \int_X (\overline{\lim}\, f_n)\, \mathrm{d}\mu.$$

A Fatou-lemából (a $g \pm f_n$ függvényekkel) kipotyog a Fatou-Lebesgue tétel, a Fatou-Lebesgue tételből kipotyog a nagy Lebesgue-tétel, a nagy Lebesgue-tételből kipotyog a kis Lebesgue-tétel.

Definiáltuk a teljes mértéktereket, kimondtam, hogy minden mértéktér kiegészíthető teljes mértéktérré. Házi feladat a bizonyítás részleteit végiggondolni. Definiáltuk a majdnem, μ-majdnem, majdnem mérhető, majdnem integrálható stb. fogalmakat. Bebizonyítottuk, hogy ha $\sum \int_X |f_n|\ \mathrm{d}\mu < \infty$, akkor $f = \sum \int_X f_n\, \mathrm{d}\mu$ m.m. értelmes, és $f \in \mathcal{L}_1$.

Elkezdtük a külső mértékeket. Definiáltuk a "relatív külső mérték" és "külső mérték" tulajdonságokat. Két példa volt, az $\alpha(H) = \begin{cases} 1 & \text{ha } H \neq \emptyset \\ 0 & \text{ha } H = \emptyset \end{cases}$ külső mérték, és a Jordan-térfogat a Jordan-mérhető halmazok gyűrűjén. Utóbbiról bebizonyítottuk, hogy relatív külső mérték. Minden α relatív külső mértékhez definiáltuk a φ_α külső mértéket; ha α a Jordan-térfogat, akkor $\varphi_\alpha = \overline{\lambda}$ a külső Lebesgue-mérték. Bebizonyítottuk, hogy Jordan-mérhető halmazok külső mértéke ugyanaz, mint a Jordan-térfogatuk.

Definiáltuk a mérhetőséget, kimondtam, hogy ha φ külső mérték, akkor az $\mathcal{M}_\varphi$ halmazrendszer σ-algebra, ezen a φ teljes mérték, és bármely $H \subset X$ esetén φ mérték a $\mathcal{M}_\varphi\big|_H$ megszorításon. Ebből annyit bebizonyítottunk, hogy $\mathcal{M}_\varphi$ halmazrendszer σ-algebra, amin a φ mérték. A teljesség és a megszorításra vonatkozó állítás legközelebbre maradt.

10. előadás, március 21.

[Petruska, 63–70. o.]

Befejeztük a múltkori utolsó bizonyítást.

Bebzionyítottuk, hogy a Jordan-mérhető halmazok a külső Lebesgue-mérték szerint mérhetőek, és ez az additivitáson múlik. Definiáltuk a Lebesgue-mértéket, ami tehát a Jordan-térfogat kiterjesztése. Megbeszéltük, hogy a Lebesgue-mérték egybevágóság-invariáns, és elég lenne Jordan-mérhető halmazok helyett téglákkal, vagy akár racionális koordinátájú téglakkal fedni a definícióban. Ezzel szemben az $\alpha(H) = \begin{cases} 1 & H \neq \emptyset \\ 0 & H = \emptyset \end{cases}$ halmazfüggvénynél nem igaz, hogy a $\mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$ kiterjesztése az α függvénynek. Arra is láttnk példát, hogy ha a halmazrendszerünk túl sovány, akkor az additivitás ne,m lesz elég.

Ezután kimondtuk és bebizonyítottuk a Caratheodory (Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή) féle mértékkiterjesztési tételt félgyűrűre. Az egyértelműséget olyan formában is kimondam, hogy minden $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$ közbülső σ-algebrában, minden α szerint σ-véges halmaz kiterjesztett mértéke egyértelmű. A σ-végesség fontosságára a balról zárt, jobbról nyílt intervallumok félgyűrűjén a konstans ∞ példát láttuk: ennek kiterjesztése a Borel halmazokon a konstans ∞ és a számlálómérték is (és pl. az egyelemű halmazokon a két mérték különbözik).

A mértékkiterjesztési tételből látszik, hogy a Jordan-térfogatnak nincs más kiterjeszése a Lebesgue-mérhető halmazokra.

11. előadás, március 22.

[Petruska, 70–72., 81–82. o.]

Elmondtam, hogy a Lebesgue-mérhető halmazok nagyon közel vannak szép Borel-halmazokhoz: ha $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető, és $\lambda(A) < \infty$, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan B halmaz, ami véges sok, racionális végpontú intervallum uniója, és $\lambda(A \triangle B) < \varepsilon$. Ebből házi feladat levezetni, hogy $\lim\limits_{t \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) \, \mathrm{d}x = 0$ (Riemann-[Lebesgue-]lemma), továbbá házi feladat ennek mintájára igazolni, hogy minden $f \in \mathcal{L}_1$ függvényhez és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan szakaszonként konstans g függvény, ami véges sok, racionális végpontú intervallumon konstans, és mindegyik értéke racionális, azokon kívül 0, és $\int_{\mathbb{R}} |f - g| \, \mathrm{d}\overrightarrow{\lambda} < \varepsilon$ (ebből következik, hogy az $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \lambda)$ tér szeparábilis); végül ebből levezetni, hogy az $\mathcal{L}_1$ térben az eltolás folytonos, vagyis $f \in \mathcal{L}_1$ esetén $\lim\limits_{h \to 0} \|f(x) - f(x+h)\|_1 = \lim\limits_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+h)| \, \mathrm{d}\overrightarrow{\lambda}(x) = 0$.

Bebizonyítottuk, hogy minden pozitív külső mértékű halmaz tartalmaz nem mérhető részhalmazt.

Definiáltuk additív intervallumfüggvényeket: legyen az alaphalmazunk egy G nyílt intervallum, $V \subset G$ sűrű; ekkor $\mathcal{E} = \big\{[a, b) : a, b \in V, a \leq b\big\}$ a megengedett intervallumok félgyűrűje; legyen továbbá $\alpha : \mathcal{E} \to [0, \infty)$. Az α intervallumfüggvény akkor és csak akkor additív, ha van olyan $F : G \to \mathbb{R}$ monoton novő eloszlásfüggvény, amire $\alpha\big([a, b)\big) = F(b) - F(a)$. Az α akkor és csak akkor relatív külső mérték, ha F a V pontjaiban balról folytonos. Ezután kétféleképpen is felépíthetjük a Lebesgue-Stieltjes mértéket: csak az F folytonossági pontjait engedük meg, vagy pedig kikötjük, hogy F mindenhol balról folytonos.

Megbeszéltük, hogy az 1-dimenziós eszközök részben átvihetők magasabb dimenzióba, de a $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt halmaz alakjától függően nem biztos, hogy van együttes eloszlásfüggvény. Definiáltuk a folytonossági hipersíkokat és p-dimenziós Lebesgue-Stieltjes mértéket.

12. előadás, március 28.

[Petruska, 72–75. o.]

Megvolt a LS-mértékek regularitása, amiből következik, hogy a LS-mérhető halmazok rendszere éppen $\mathcal{B}^*$, persze a $*$ jelentése attól függ, melyik LS-mértékről van szó. Megbeszéltük, hogy a különböző intervallumok mértékét hogyan fejezhetjük ki az eloszlásfüggvénnyel. Bebizonyítottuk a Luzin-tételt.

13. előadás, március 28.

[Petruska, 76–80. o.]

Megvolt a LS-integrál és a RS-integrál kapcsolata, egy kis szépségibától eltekintve, amit majd legközelebb rendbe teszünk.

14. előadás, április 4.

[Petruska, 79–81, 85–87. o.]

Befejeztük az LS-integrált.Megvoltak a mértéktartó leképezések.

Definiáltuk az eljőeles és akomplex mérték fogalmát. Definiáltuk ki egy korlátos változású $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény totális, pozitív és negatív variációit intervallumokon, majd ezeket kiterjesztettük LS-mértékekké. Bizonyítás nélkül felírtuk, hogy $\pi + \nu = \tau$, a $\vartheta = \pi - \nu$ előjeles mérték az f megváltoizásával kapcsolatos.

Definiáltuk előjeles és komplex mértékek variációit, kimondtam, hogy ezek mértékek, és elkezdtük bizonyítani a τ-ra.

15. előadás, április 5.

[Petruska, 85–89. o.]

Megvoltak az előjeles és komplex mértékek. Bebizonyítottuk, hogy τ mérték, előjeles mérték nem veheti fel mindkét végtelent, és van maximuma és minimuma. Ebből kipotyog a Hahn-felbontás, abból pedig a Jordan-felbontás és a $\tau = \pi + \nu$ képlet, valamint az, hogy minden előjeles mérték előáll egy 1 abszolút értékű függvény integráljaként a totális variáció szerint.

Elmondtam a bevezetőt az abszolút folytonos függvényekhez.

16. előadás, április 11.

[Petruska, 90–95. o.]

Definiáltuk az abszolút folytonos és szinguláris relációkat és ezek legfontosabb tulajdonságait. Bebizonyítottuk a Lebesgue-felbontást és a Radon-Nikodym tételt, de csak σ-véges mértékekre. Volt a 18.7. tétel (helyettesítés Radon-Nikodym deriválttal). Szögtartományokra bontással vázlatosan igazoltuk a 18.8. tételt: ha $\vartheta(H) = \int_H f \, \mathrm{d}\mu$, akkor $\tau_\vartheta(H) = \int_H |f| \, \mathrm{d}\mu$. Speciálisan, ha $\mu = \tau$ és $f = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\mu}$, akkor a Radon-Nikodym derivált egyértelműségéből $|f| = 1$ (18.6. tétel). Definiáltuk az előjeles és komplex mértékek szerinti integrálokat.

17. előadás, április 25.

[Petruska, 97–100. o.]

Feladtam 1 óriás túrórudiért annak elemi bizonyítását, hogy minden monoton $(a, b) \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható legalább egy pontban.

Definiáltuk a differenciálbázisokat és a mérték szerinti deriváltakat. Definiáltuk a maximális függvényt a szimmetrikus bázissal, a maximális függvényről megmutattuk, hogy mérhető, a deriváltakra csak kimondtuk, és majdnem bebizonyítottuk a maxiumális operátor tételét. A gömbrendszerekről szóló lemmát majd a következő előadáson... ;-) Megmutattuk, hogy lokálisan véges mérték deriváltja csak nullmértékű halmazon lehet végtelen. Definiáéltuk a Lebesgue-pontokat.

18. előadás, április 26.

[Petruska, 100–103. o.]

Benizonyítottuk, hogy lokálisan integrálható függvénynek m.m. pont Lebesgue-pontja; ha f lok. integrálható, akkor az $\int f \, \overrightarrow{\mathrm{d}\lambda}$ mérték deriváltja bármely reguláris bázis szerint egyenlő f-fel; Lebesgue-pontokban az eloszlásfüggvény hagyományos deriváltja ugyanaz, mint a mérték szerinti derivált. Bebizonyítottuk, hogy szinguláris mérték deriváltja m.m. nulla, illetve ha θ Lebesgue-felbontása $\theta = \int f \, \overrightarrow{\mathrm{d}\lambda} + \beta$, akkor $D\theta = f$ m.m.

A végén futólag definiáltuk az abszolút folyt. és szing. egyváltozós függvényeket, mint amik absz.folyt/szing. mértékek eloszlásfüggvényei, de ezt még tárgyalni fogjuk.

19. előadás, május 2.

[Petruska, 104–105., 113–114 o.]

Megvolt a sűrűségi tétel. Elkezdtük az abszolút folytonos függvények differenciálhatóságát. Bebizonyítottuk az abszolút folytonosság kétféle definíciójának ekvivalnciáját.

20. előadás, május 3.

[Petruska, 113–117., 121. o.]

Bebizonyítottuk, hogy minden monoton függvény m.m. differenciálható. Konstruáltunk szigorúan monoton növő, folytonos, szinguláris függvényt. Bebizonyítottuk, hogy ha egy monoton növő függvény mindenhol differenciálható, akkor a deriváltjának Lebesgue-integrálfüggvénye.

Definiáltuk két mértéktér szorzatát és elkezdtük a Fubini-tétel bizonyítását.

21. előadás, május 9.

[Petruska, 100–103. o.]

Befejeztük a Fubini-tétel bzonyítását, majd definiáltuk tetszőlegesen sok valószínűségi mértéktér szorzatát.

22. előadás, május 16.

[Petruska, 127–130. o.]

Elkezadtük az L_p terek. Definiáltuk az L_p és L_∞ normákat, L_p és ℓ_p tereket, megvoltak a Hölder-, Cauchy-Schwarz és Minkowski-egyenlőtlenségek, faktorizálás a majdnem konstans nulla függvények terével, Riesz-Fischer tétel, a Banach-tér fogalma. Az L_2 terekben definátuk a skaláris szorzást és a Hilbert-tereket.

23. előadás, május 16.

[Petruska, 130, 134–137. o.]

Megbeszéltük, hogy az L_p-térben sűrű az egyszerű függvények altere, $p < \infty$ esetén $L_p(\mathbb{R}^n)$-ben sűrű halmazt alkotnak a véges sok, racionális koordinéátú tégalapon racionális konstans függvények, a kompakt tartójú folytonos függvények, és $L_p(\mathbb{R}^n)$ szeparábilis. Vlt példa arra, hogy $L\infty(\mathbb{R})$ nem szeparábilis.

Bebizonyítottuk, hogy $L_2([a,b])$-ben a Legendre-polinomok, illetve periodikus esetben a trigonometrikus polinomok teljes rendszert alkotnak. Definiáltam a Schauder-bázis fogalmát. Konstruáltunk Schauder-bázist $L_2(\mathbb{R}^n)$-ben (kockánként); az ilyen bázis ad egy egyszerű izomorfiát $L_2(\mathbb{R}^n)$ és ℓ_2 között.

Megvolt a mértékben való konvergencia.

24. előadás, május 16.

[Petruska, 138–139. o.]

Definiáltuk $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvények konvolúcióját. Bebizonyítottuk, hogy L_1-beli függvények konvolúciója létezik, és $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$; a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tér a konvolúcióval kommutatív Banach-algebra.

Definiáltuk $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ és $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvények Fourier-transzformáltját; bebizonyítottuk, hogy L_1-beli függvények Fourier-transzformáltja korlátos, és bebizonyítottuk, hogy konvolúció Fourier-transzformáltja a Fourier-transzformáltak szorzata. Definiáltuk $\mathbb{R}$-en vett korlátos mértékek, Fourier-transzformáltját, illetve ezek eloszlásfüggvényeinek Fourier-Stieltjes transzformáltját is.