Tájékoztató és részletes tételjegyzék az Analízis IV. vizsgához (sillabusz)

2016/2017, II. félév

Matematika BSC, II. évfolyam, matematikus szakirány

A vizsga részei:

- Felkészülés (legalább 40 perc)
- A tételjegyzék két tételének vázlatos kidolgozása és szóbeli előadása.
- Válaszadás a vizsgáztató szóbeli kérdéseire.

A vizsgán a tételjegyzéket használhatjátok, a sillabuszt nem. A felkészülési időben az íróeszközökön kívül egy A4-es lap, saját kézzel írt jegyzet használható.

Az elégséges osztályzathoz legalább ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket (jegyzet nélkül).

Egyszerre 4-5 vizsgázó készülhet a teremben.

Ez a tájékoztató letölthető innen:
http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an4/an4-sillabusz.pdf

A tételjegyzék pedig innen:
http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an4/an4-teteljegyzek.pdf

Részletes tételjegyzék

1. Görbék. Vonalintegrál

Görbék. Folytonosság, differenciálhatóság, Lipschitz-tulajdonság, stb. Görbe hossza, rektifikálható görbe. Átparaméterezés és megfordítás. Kettévághatóság. Egy görbe akkor rektifikálható, ha a koordinátafüggvényei korlátos változásúak. Differenciálható görbe hosszának kiszámítása. Ívhossz szerinti paraméterezés. (Laczkovich-T. Sós I, 195–197, 438–446. old.) Ívhossz szerinti integrál. Nem függ a paraméterezéstől, lineáris, additív. (Laczkovich-T. Sós II, 165. old.) Vonalintegrálok. Tulajdonságok. Feltételek a létezésre. Átírás Riemann-Stieltjes, illetve Riemann-integrállá, ha az integrációs út differenciálható. Newton-Leibniz formula valós vonalintegrálokra. (Laczkovich-T. Sós II, 140-145. old.)

2. A primitív függvény létezésének feltételei

Konzervatív vektormező, primirív függény és potenciálfüggvény fogalma. A primitív függvény konstans erejéig egyértelmű. Ha $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt, és $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos, akkor a következők ekvivalensek: (a) f-nek létezik primitív függvénye; (b) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt, folytonos, rektifikálható görbén; (c) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt töröttvonalon. Differenciálható f esetén a primitív függvény létezéséhez szükséges, hogy f' mindenhol szimmetrikus legyen. A lineáris leképezés primitív függvénye. Goursat-lemma valós vonalintegrálokra. A primitív függvény létezése konvex és csillagszerű tartományokon.

3. Homotópia és vonalintegrál

Homotóp görbék. A vonalintegrál azonos végpontú, zárt, illetve nullhomotóp görbéken. A primitív függvény létezése egyszeresen összefüggő tartományokon. Példák egyszeresen összefüggő és nem egyszeresen összefüggő tartományokra, és olyan függvényekre, amelyeknek lokálisan létezik, de globálisan nem létezik primitív függvénye. Zárt vezető mágneses örvényerőssége és a Gauss-féle összekapcsolódásái szám kapcsolata.

4. Integráltételek síkban

Egyszerű zárt görbék, Jordan-görbetétel (bizonyítás nélkül). Síkvektorok keresztszorzata, irányított szöge, egyszerű zárt görbe irányítása. Green-tétel (bizonyítás normáltartományra, és a bizonyítás vázlata az általános esetben). Külső normális. Newton-Leibniz formula síkban. Mese a kertünkben felörő és örvénylő talajvíztól. Forrás- és örvényerősség és -sűrűség, divergencia, rotáció. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Stokes-tétel.

5. Integráltételek három dimenzióban

Folytonsan differenciálható paraméteres felületek. Felszín, normálvektor. Felszín szerinti és felületi integrálok. A Green-tétel térbeli megfelelője. 3-dimenziós NL-formula. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Stokes-tétel. Kelvin-Stokes tétel (bizonyítás nélkül). Kapcsolat a Maxwell-egyenletek differenciális és integrális alakjai között. (Magukat a Maxwell-egyenleteket nem kell megtanulni.)

6. Mérhető terek és mérhető függvények

Halmazrendszerek, megszorítás. Additív és σ-additív halmazfüggvények. Halmazalgebra, gyűrű, modulus, félgyűrű, σ-algebra, σ-gyűrű. Generált struktúrák. Borel-halmazok top. terekben. Mérhető tér, mérhető függvények. Mérhetőség és műveletek (min, max, alapműveletek, határérték, kompozíció). Egyszerű függvények. Nemnegatív mérhető függvény mint egyszerű függvények limesze. (Petruska II, 10. fej.)

7. Mérték és integrál

Mérték. Megszámlálható unió és metszet mértéke. Egyszerű függvény integrálja. Nemnegatív mérhető függvény integrálja. Monoton konvergencia tétele. Összeg integrálja. Beppo Levi tétele. Fatou-lemma. Előjeles és komplex mértékek. Az L_1 tér. Korlátos kovergencia tétel. Dominált konvergencia tétel. Fatou-Lebesgue tétel. Teljes mértéktér. Az integrál kiterjesztése majdnem mérhető függvényekre. Ha $\sum ||f_n||_1$ konvergens, akkor $f_n \to 0$ m.m. (Petruska II, 11. fej.)

8. Külső mérték; mértékek kiterjesztése

Relatív külső mérték és külső mérték. Nemnegatív halmazfüggvényhez asszociált külső mérték. A mérhető halmazok σ-algebrája. Félgyűrűn additív RKM egyértelműen kiterjeszthető a generált gyűrűre. Mértékkiterjesztési tétel. A kiterjesztés egyértelműsége σ-véges térben. Példa arra, hogy a kiterjesztés nem mindig egyértelmű. (Petruska II, 12. fej.)

9. Lebesgue- és Lebesgue-Stieltjes mértékek

A Lebesgue-féle külső mérték és mérték. Invariancia az egybevágóságokra. Minden Lebesgue-mérhető halmazhoz van közeli halmaz, ami véges sok téglalap uniója. Additítív téglafüggvények. A folytonossági hipersíkok halmaza megszámlálható. Lebesgue-Stieltjes mérték. Regularitás. Mérhető halmaz közelítése nyílt, zárt, kompakt, G_δ és F_σ halmazokkal. Luzin tétele. Intervallumok mértéke 1-dimenzióban. (Petruska II, 13. fej.)

Nem mérhető halmazok létezése. (Petruska II, 16. fej.)

10. Lebesgue- és Lebesgue-Stieltjes integrál

Egydimenziós LS mérték eloszlásfüggvénye. Alsó és felső burkoló. Félig folytonos függvények. Kapcsolat az alsó és felső Stieltjes integrállal. A Riemann-Stieltjes integrál létezésének feltétele. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle ekvivalens feltétele. (Petruska II, 14. fej.)

Mértéktartó leképezések. (Petruska II, 15. fej.)

11. Előjeles mértékek és variációik

Előjeles és komplex mértékek. Előjeles mérték nem veheti fel mindkét végtelent. Majoráns mérték. Pozitív, negatív és totális variáció. A totális variáció majorálja a pozitív és a negatív variációt. Előjeles mérték szerint létezik maximális és minimális mértékű halmaz. Hahn-felbontás. Jordan-felbontás. $\tau = \pi + \nu$. (Petruska II, 17. fej.)

12. Abszolút folytonos és szinguláris mértékek

Abszolút folytonos és szinguláris mértékek. Mérték tartója. Lebesgue-felbontás. Radon-Nikodym tétel. Helyettesítéses integrálás. A totális variáció szerinti RN derivált. Előjeles és komplex mérték szerinti integrál. (Petruska II, 18. fej.)

13. Mértékek differenciálása

Differenciálbázis. Alsó és felső deriváltak. Szimmetrikus, közönséges és erős derivált. Maximális operátor. Az alsó és a felső derivált mérhetősége. A maximális operátor tétele. Egy Borel-mérték akkor és csak akkor szinguláris, ha a deriváltja m.m. 0. Lebesgue-pont. Abszolút folytonos mérték m.m. differenciálható, és a deriváltja megegyezik a Radon-Nikodym deriválttal. (Petruska II, 19. fej.)

14. Sűrűségi tétel. Abszolút folytonos és szinguláris függvények

Mérhető burok. Alsó és felső sűrűség. Sűrűségi tétel. (Petruska II, 20. fej.)

Abszolút folytonos és szinguláris függvények. Az abszolút folytonosság átfogalmazása ε, δ-val. Példa szigorúan monoton és folytonos, szinguláris függvényre. A Lipschitz-tulajdonság, az abszolút folytonosság és korlátos változás kapcsolata. Szinguláris függvény deriváltja m.m. 0. Abszolút folytonos függvény m.m. differenciálható, és a derivált integrálfüggvénye. Korlátos változású (spec. monoton) függvény m.m. differenciálható. (Petruska II, 22. fej.)

15. Mértékterek szorzata

σ-additivitás két mértéktér direkt szorzatán. Két mértéktér szorzata. Fubini-tétel (bizonyítás nélkül). Véges sok mértéktér szorzata. Akárhány valószínűségi mértéktér szorzata. Bizonyítás a σ-additivitásra. (Petruska II, 23. fej.)

16. A Fubini-tétel

(Petruska II, 121-123, old.)

17. L_p-terek

L_p-normák. Konjugált kitevők, Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség. Félmetrikus terek. Faktorizálás a m.m. 0 függvények terével. L_p-terek. Teljesség. Riesz-Fischer-tétel.

Az L_2 Hilbert-tér. Skaláris szorzás. Schauder-bázis. Az ortonormált polinomok és trigonometrikus polinomok rendszerének teljessége. Az $L_2(\mathbb{R}^n)$ izomorfiája az ℓ_2 térrel.

(Petruska II, 24. fej.)

18. Mértékben való konvergencia. Konvolúció.

Mértékben való konvergencia. Metrizálhatóság. Kapcsolat a mértékben való és az L_p-beli konvergencia között. Teljesség. (Petruska II, 25. fej.)

L_1-beli függvények konvolúciója. L_1 mint kommutatív Banach-algebra. (Petruska II, 26. fej.)

L_1-függvények Fourier-transzformáltja. Véges Borel-mértékek Fourier-transzformáltja. Fourier-Stieltjes transzformált. Konvolúció Fourier-transzformáltja a Fourier-transzformáltak szorzata.