1. Valós analízis gyakorlat, 2017. február 14.

8:25–9:55+ε, D-3-306

Gyakorlatvezető: Héra Kornélia (herakornelia@gmail.com)

Osztályozás: gyakorlati jegy $\approx \dfrac{2 \cdot Z_1 + 2 \cdot Z_2 + \overline{R} + P}{5} \pm M$, ahol Z_1 és Z_2 a két ZH pontszám, $\overline{R}$ a 4–7 röpdolgozat átlaga a legrosszabb érték nélkül, P a megszerzett Pedál Medál Pirospontok száma, M az órai munka (a.k.a. pofafaktor).

A gyakorlatokon való részvétel kötelező. Ha valaki a gyakorlatok negyedénél többről hiányzik, akkor csak rendkívüli, igazolt esetben, többletfeladatok teljesítése után kaphat gyakorlati jegyet. Ha valaki a gyakorlatoknak a harmadánál többről hiányzik, akkor egyáltalán nem kaphat gyakorlati jegyet.

Az első ZH időpontja: március 29.

Bővebb tájékoztató a gyakorlatokról:
`http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an4/Tajekoztato.html`

1.1. Számítsuk ki a következő Stieltjes-integrálokat.

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}[x] \qquad \int_0^1 [x] \, \mathrm{d}\{x\} \qquad \int_0^1 [x+0.5] \, \mathrm{d}\{x\}$$

1.2. Számítsuk ki a következő Stieltjes-integrálokat közvetlenül és parciális integrálással is.

$$\int_0^2 x^2 \, \mathrm{d}\left[\sqrt{x}\right] \qquad \int_0^\pi x \, \mathrm{d}(\sin x)$$

1.3. Számítsuk ki a következő Stieltjes-integrálokat.

$$\int_0^\pi \cos x \, \mathrm{d}(\sin x) \qquad \int_0^3 x^2 \mathrm{d}[e^x]; \qquad \int_0^1 \{x\} \mathrm{d}(\sin \pi x)$$

1.4. Nevezzünk egy p prímet érdekesnek, ha egy ikerprím pár egyik tagja, vagyis $p+2$ és $p-2$ valamelyike szintén prím. Legyen $x>0$-ra $f(x)$ az olyan, x-nél nem nagyobb érdekes prímszámok száma. Ismert, hogy $f(x) \le \mathcal{O}\left(\dfrac{x}{\log^2 x}\right)$.

(a) Írd fel az x-nél nem nagyobb érdekes prímek reciprokösszegét Stieltjes-integrál alakban.
(b) Integráljunk parciálisan.
(c) Bizonyítsuk be, hogy az ikerprímek reciprokösszege véges.

1.5. Egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ számelméleti függvényre teljesül, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = n \log n + \mathcal{O}(n)$. (Ilyen függvény például a osztók száma.) Vezess le ebből, egy alkalmas Stieltjes integrál parciális integrálásával, aszimptotikus becslést a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k}$ összegre.

1.6. Legyen $\pi(x) = \displaystyle\sum_{p \le x} 1$ a prímek száma x-ig, és $\vartheta(x) = \displaystyle\sum_{p \le p} \log p$ a prímek logaritmusösszege. Írjuk át ezeket az összegeket Stieltjes integrállá, és igazoljuk, hogy a következő állítások ekvivalensek:

(a) $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$, ha $x \to \infty$; (b) $\vartheta(x) \sim x$, ha $x \to \infty$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} - \log x \right)$ létezik.

1.7. Legyen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ Stieltjes-integrál létezik. Igazoljuk, hogy ha f és g folytonos a $c \in (a, b)$ pontban, akkor az $F(x) = \int_a^x f \, \mathrm{d}g$ függvény is folytonos c-ben.

1.8. Hogyan definiálhatnánk az $\int_a^b f \cdot |\,\mathrm{d}g|$ integrált? Mondjunk elégséges feltételeket a létezésére!

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM1.1. A síkon az origó közepű, $R \geq 1$ sugarú körbe eső rácspontok száma $R^2\pi + \mathcal{O}(R^\vartheta)$, ahol $\vartheta \leq 1$. ($\vartheta = 1$ triviális; $\vartheta = 2/3$ elemi; $\vartheta = 131/208 \approx 0.62981$ ismert; $\vartheta = 1/2$-re nem igaz.)

Ennek felhasználásával becsüljük meg a körbe eső, origótól különböző rácspontok origótól mért távolságának szorzatát.

PM1.2. Terjesszük ki a Stieltjes-integrált improprius értelemben. Legyen $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$, $f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ Stieltjes integrál létezik tetszőleges $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ intervallumban. Legyen

$$\int_\alpha^\beta f \, \mathrm{d}g = \lim_{a \to \alpha+} \lim_{b \to \beta-} \int_a^b f \, \mathrm{d}g.$$

Igazoljuk, hogy ha $\int_\alpha^\beta |f| \cdot |\,\mathrm{d}g|$ véges, akkor $\int_\alpha^\beta f \, \mathrm{d}g$ konvergens.

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an4/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu