2. Valós analízis gyakorlat, 2017. február 21.

8:25–9:55+ε, D-3-306

2.1. Tekintsünk egy $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt egydimenziós görbének. Mikor rektifikálható ez a görbe? Mi a hossza?

2.2. Legyen $\gamma(t) = (1, t, t^2)$ $(t \in [0, 1])$ és $f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$. Számítsuk ki a következő vonalintegrálokat:

$$\int_\gamma f_1 \ \mathrm{d}y \qquad \int_\gamma < f,\ \mathrm{d}\mathbf{x} > \qquad \int_\gamma f \times \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Melyik integrált számíthatjuk ki közvetlenül a valós vonalintegrálokra vonatkozó Newton-Leibniz formulából?

2.3. Legyen $\gamma : [1, 2] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\ln t, 2t, t^2)$.
(a) Számítsd ki a γ görbe hosszát.
(b) Számítsd ki az $f(x, y, z) = (x, y, z)$ függvény vonalintegrálját a görbén.

2.4. Legyen $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű, zárt, rektifikálható görbe. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_\gamma x^2 \ \mathrm{d}x = \int_\gamma e^{-\cos y^2} \ \mathrm{d}y = 0.$$

2.5. Adott a 3-dimenziós térben mentén egy elektromosan feltöltött ℓ egyenes, amelyen a töltés egyenletesen, $\varrho > 0$ lineáris töltéssűrűséggel oszlik el. (A ϱ mértékegysége tehát $\frac{C}{m}$.) A Coulomb-törvényből következik, hogy az egyenes elektromos mezeje mindenhol az ℓ-re bocsátott egyenes irányában kifelé mutat; az ℓ-től r távolságban a térerősség nagysága $\dfrac{\varrho}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r}$.

Mekkora az elektromos potenciál az egyenestől r távolságban?

2.6. Igazold, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos, és minden tengelypárhuzamos téglalap kerülete mentén eltűnik a vonalintegrálja, akkor f-nek van primitív függvénye.

2.7. Mutass példát olyan folytonos $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényre, aminek minden zárt rektifikálható görbén 0 a vonalintegrálja, de nem mindenhol differenciálható.

2.8. Az alábbiak közül melyik kétváltozós függvénynek van primitív függvénye? Ha van, írjuk fel az összeset! Ha nincs primitív függvény, mutassunk példát olyan zárt görbére, amelyen a vonalintegrál nem tűnik el!

$$(x, y); \quad (y, x); \quad \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right); \quad (\operatorname{ch} y; x \operatorname{sh} y); \quad (\operatorname{ch} x; y \operatorname{sh} x)$$

2.9. Mik azok a differenciálható $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, amire a következő állítások teljesülnek? Ha γ egyszerű, zárt, rektifikálható görbe $\mathbb{R}^2$-ben, akkor

$$\int_\gamma e^x \sin y \,\mathrm{d}x = \int_\gamma f(x, y) \,\mathrm{d}y; \qquad \int_\gamma x^2 y^3 \,\mathrm{d}y = \int_\gamma g(x, y) \,\mathrm{d}x.$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM2.1. Gondold végig (és írd le) a Goursat-lemma bizonyítását háromszöglemez helyett téglalappal.

PM2.2. (a) Legyen $(f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos, konzervatív vektormező. Igazold, hogy ha f minden pontban parciálisan differenciálható y szerint, és $D_y f$ folytonos, akkor g minden pontban parciálisan differenciálható x szerint, és $D_x g = D_y f$.

(b) Mutass példát olyan $(f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos, konzervatív vektormezőre, amelyre igaz, hogy f minden pontban parciálisan differenciálható y szerint, de g nem minden pontban differenciálható parciálisan x szerint.

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an4/`
További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`