3. Valós analízis gyakorlat, 2017. február 28.

8:25–9:55+ε, D-3-306

3.1. Keressünk olyan differenciálható $G \to \mathbb{R}^3$ vektormezőt, ami rotációmentes (azaz a „keresztbe vett" parciális deriváltjai megegyeznek), de nincs primitív függvénye, ahol

(a) $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$; (b) $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,x,x) : x \in \mathbb{R}\}$; (c) $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,0) : \ x^2+y^2=1\}$.

3.2. Melyik halmaz egyszeresen összefüggő?

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \qquad \mathbb{R}^3 \setminus \{t,0,0) : t \in \mathbb{R}\} \qquad \mathbb{R}^4 \setminus \{t,0,0,0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{(\cos t, \sin t, 0) : t \in \mathbb{R}\} \qquad \mathbb{R}^3 \setminus \{(\cos t, \sin t, e^t) : t \in \mathbb{R}\}$$

3.3. Az $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ vektormező akárhányszor differenciálható, rotációmentes, és az origó egy pontozott környezetében korlátos. Bizonyítsd be, hogy van primitív függvénye.

3.4. Ellenőrizzük a Green-tételt a $[0,1] \times [0,1]$ négyzetre és az $f(x,y) = xy$ függvényre.

3.5. Bizonyítsd be integráltétellel, hogy az egységkör kerületének és területének aránya 2!

3.6. Számítsuk ki az $\int_\gamma f \times n \ ds$, és az $\int_\gamma < f, n \ ds >$ integrálok értékét, ha γ az egységkör, és

$$(a) f(x,y) = (x^2+y, x+y^3) \qquad (b) f(x,y) = (-x^2y, xy^2).$$

3.7. Mi lehetne a parciális integrálás a kétdimeziós Green (Newton-Leibniz) formulával?

3.8. Egy m tömegű, homogén tömegeloszlású, síkbeli lemezt egy egyszerű, zárt, pozitív irányítású, rektifikálható g görbe határol. Írd fel

(a) a lemez súlypontjának koordinátáit

(b) a lemez tehetlenségi nyomatékát a súlypontja körül

alkalmas függvények g mentén vett vonalintegráljai segítségével.

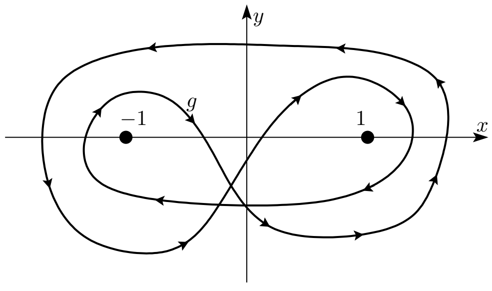
3.9. Legyen g és h két zárt, folytonos, rektifikálható görbe $\mathbb{R}^3$-ban, amiknek nincs közös pontja. A két görbe Gauss-féle összekapcsolódási számát (linking number) a $\dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_g \int_h \dfrac{\langle x-y;\ \mathrm{d}x \times \ \mathrm{d}y \rangle}{|x-y|^3}$ kétszeres vonalintegrál adja meg, ahol az x pont a g görbén, az y pont pedig a h görbén fut végig.

(a) Mi az $\dfrac{\langle x-y;\ \mathrm{d}x \times \ \mathrm{d}y \rangle}{|x-y|^3}$ kifejezés geometriai jelentése?

(b) Számítsd ki az összekapcsolódási számot, ha g az origó középpontú egységkör az $x-z$ koordinátasíkban, h pedig az $(1,0,0)$ középpontú, 2 oldalú négyzetvonal az $x-y$ koordinátasíkban.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM3.1. Legyen $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$, és g az ábrán látható görbe.



(a) Mutassuk meg, hogy g-n bármely $f : G \to \mathbb{R}^2$ differenciálható, rotációmentes vektormező vonalintegrálja eltűnik.

(b) Nullhomotóp-e g a G halmazban?

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an4/`

További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`