4. Valós analízis gyakorlat, 2017. március 7.

8:25–9:55+ε, D-3-306

4.1. Legyen $P = \{(u,v) \in [0,1]^2 : u^2+v^2 \le 1\}$, $g(u,v) = (u,v,u^2+v^2)$, $F = g(P)$ és $f(x,y,z) = (x,y,z)$. Írjuk át (esetleg többszörös) Riemann-integrállá a következő felszíni/felületi integrálokat.

$$\int_F \overrightarrow{\mathrm{d}A}; \quad \int_F |\,\mathrm{d}A|; \quad \int_F \left\langle f,\, \overrightarrow{\mathrm{d}A}\right\rangle; \quad \int_F f \times\, \overrightarrow{\mathrm{d}A}.$$

4.2. Rögzített $a \in \mathbb{R}^3$ mellett legyen (a) $f(x) = x \times a$ ($x \in \mathbb{R}^3$); (b) $f(x) = a \times x$ ($x \in \mathbb{R}^3$).

$$\operatorname{div} f = ? \qquad \operatorname{rot} f = ?$$

4.3. Számítsuk ki az r sugarú gömb felszínét a divergenciatételből, az $f(x,y,z) = (x,y,z)$ vektormező felületi integráljából.

4.4. Legyen $f_1(x,y,z) = xyz$ és $f_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Konstruálj olyan $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt, amire az (f_1,f_2,f_3) vektormező felületi integrálja tetszőleges zárt gömbfelületen megegyezik a gömb térfogatával.

4.5. Az $F \subset \mathbb{R}^3$ konvex sokszöget a g zárt, irányított töröttvonal határolja. A síklap jobbkézszabály szerint irányított területvektora $\vec{A}$. Igazold, hogy

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\int_g \mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

4.6. (a) Milyen gyűrűt generálnak az $[a,\infty)$ alakú félegyenesek?
(b) Milyen σ-gyűrűt generálnak az $[a,\infty)$ alakú félegyenesek?
(c) Mekkora számosságú halmaz generálja a Borel-halmazok σ-gyűrűjét?

4.7. (a) Igazoljuk, hogy ha egy halmaz benne van az $\mathcal{A}$ halmazrendszer által generált gyűrűben, akkor benne van az $\mathcal{A}$ egy alkalmas véges részrendszere által generált gyűrűben is.

(b) Igazoljuk, hogy ha egy halmaz benne van az $\mathcal{A}$ halmazrendszer által generált σ-gyűrűben, akkor benne van az $\mathcal{A}$ egy alkalmas megszámlálható részrendszere által generált σ-gyűrűben is.

4.8. (1) Igazoljuk, hogy tetszőleges $c \in \mathbb{R}^n$ esetén $\overline{\lambda}(A+c) = \overline{\lambda}(A)$ minden $A \subset \mathbb{R}^n$-re, valamint ha $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mérhető, akkor $E+c$ is, és $\lambda(E+c) = \lambda(E)$. (Ahol $A+c = \{x+c\colon x \in A\}$, $\overline{\lambda}$ a Lebesgue-külső mérték, és λ a Lebesgue-mérték.)

(2) Igazoljuk, hogy tetszőleges $\gamma > 0$ esetén $\overline{\lambda}(\gamma A) = \gamma^n\overline{\lambda}(A)$ minden $A \subset \mathbb{R}^n$-re, valamint ha $E \subset R^n$ Lebesgue-mérhető, akkor γE is, és $\lambda(\gamma E) = \lambda(E)$. (Ahol $\gamma A = \{\gamma x\colon x \in A\}$, $\overline{\lambda}$ a Lebesgue-külső mérték, és λ a Lebesgue-mérték.)

4.9. Igazoljuk, hogy ha $H \subset \mathbb{R}$ olyan halmaz, amelyre bármely $a < b$ esetén $0 < \overline{\lambda}((a,b) \cap H) < \frac{99}{100}(b-a)$, akkor H nullmértékű.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM4.1.

1. Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt és $F : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, divergenciamentes vektormező. Igazoljuk, hogy F felületi integrálja nulla minden G-beli nullhomotóp irányított, zárt poliéderfelületen.
2. Adjunk meg az $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ halmazon olyan divergenciamentes mezőt és olyan zárt poliéderfelületet, amin a felületi integrál nem nulla.
3. Bizonyítsuk be, hogy $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ nem homeomorf $\mathbb{R}^3$-bel.

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an4/`
További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`