

## 5. Valós analízis gyakorlat, 2017. március 14.

8:25–9:55<sub>+ε</sub>, D-3-306

- 5.1. Igazoljuk, hogy  $\mathbb{R}^n$ -ben minden zárt halmaz  $G_\delta$  és minden nyílt halmaz  $F_\sigma$ .
- 5.2. Bizonyítsuk be, hogy az  $F_\sigma$ , illetve a  $G_\delta$  tulajdonságú halmazok rendszerei zártak a véges metszetre és a véges unióra.
- 5.3. Mi az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények grafikonjaiból álló halmazrendszer által generált gyűrű?
- 5.4. Bizonyítsuk be, hogy bármely  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre  $f$  folytonossági pontjainak halmaza  $G_\delta$ .
- 5.5. Legyen  $(M, \mathcal{A})$  mérhető tér,  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{A}$ -mérhető és  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-mérhető. Bizonyítsd be, hogy az  $f \circ g$  függvény  $\mathcal{A}$ -mérhető.
- 5.6. Bizonyítsd be, hogy minden korlátos változású  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény Borel-mérhető.
- 5.7. Mutass példát olyan pontonként konvergens  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt sorozatra, amire  $\int_0^1 \lim f_n = 0$  és  $\lim \int_0^1 f_n = 1$ .
- 5.8. Hogyan alkalmazhatjuk a monoton konvergencia tételt a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$$

határérték meghatározására?

- 5.9. Kicserélhetjük-e a Fatou-lemmában a  $\liminf$ -et  $\limsup$ -ra? Milyen tételt tudnánk felírni  $\limsup$ -ra?
- 5.10. Adott mérhető  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre melyikből következik a másik?  
(i)  $f$  integrálható  $X$ -en,  
(ii)  $|f|$  integrálható  $X$ -en.
- 5.11. a) Igazoljuk, hogy megszámlálható sok sűrű  $G_\delta$  halmaz metszete sűrű  $G_\delta$ .  
b) Igazoljuk, hogy  $\mathbb{Q} \in F_\sigma(\mathbb{R}) \setminus G_\delta(\mathbb{R})$ .

### Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

**PM5.1.** Igaz-e, hogy minden  $\mathbb{R}$ -beli Lebesgue-nullmértékű halmaz előáll, mint megszámlálható sok Jordan-nullmértékű halmaz uniója?