6. Valós analízis gyakorlat, 2017. március 21.

8:25–9:55+ε, D-3-306

6.1. Azt mondjuk, hogy az

$S \subset \mathbb{R}$ halmaz sűrű, ha minden nemüres $U \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazra $S \cap U \neq \emptyset$.

$S \subset \mathbb{R}$ halmaz sehol sem sűrű, ha minden nemüres $U \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazhoz létezik olyan nemüres $V \subset U$ nyílt, hogy $S \cap V = \emptyset$.

(a) Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbb{R}$-beli zárt halmaz nullmértékű, akkor sehol sem sűrű.
(b) Igaz-e, hogy ha egy halmaz sehol sem sűrű, akkor nullmértékű?
(c) Van-e sűrű nullmértékű halmaz?
(d) Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra adjunk meg olyan sűrű nyílt $G \subset \mathbb{R}$ halmazt, amire $\lambda(G) < \varepsilon$.

6.2. Külső mérték-e a külső Jordan-mérték a korlátos halmazok gyűrűjén?

6.3. (Borel-Cantelli lemma). Legyen μ mérték az X halmazon, és $A_n \subset X (n = 1, 2, \dots)$ olyan halmazok, amikre $\sum_n \mu(A_n)$ véges. Bizonyítsuk be, hogy az olyan X-beli pontok halmaza, amelyek végtelen sok A_n-nek elemei, μ-nullmértékű.

6.4. Legyen μ olyan Borel-mérték a $(0, \infty)$ félegyenesen, amire $\mu\big((0, \infty)\big) = 1$. Igazold, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \cos\left(\frac{x}{n}\right) \, \mathrm{d}\mu(x) = 1.$$

6.5. Bizonyítsuk be, hogy

$$\{x \in [0, 1] : \lim_{n\to\infty}(\text{a hármasok gyakorisága x első n tizedesjegyében}) = \frac{1}{10}\}$$

Borel!

6.6. Legyen μ eltolás-invariáns mérték $\mathbb{R}$ Borel-halmazain, amire $\mu\big([0, 1]\big) < \infty$. Igazoljuk, hogy μ a Lebesgue-mérték konstansszorosa.

6.7. Legyen X nem megszámlálható halmaz, $\mathcal{M}$ pedig az X egyelemű részhalmazai által generált σ-algebra.
a) Jellemezzük $\mathcal{M}$ elemeit!
b) Konstruáljunk olyan α valószínűségi mértéket $\mathcal{M}$-en, mely szerint az egyelemű halmazok nullmértékűek!
c) Határozzuk meg az α által generált ϕ_α külső mértéket!
d) Mi a ϕ_α által meghatározott mérték és mely halmazok mérhetőek?

6.8. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és legyen $A \in \mathcal{A}$. Bizonyítsuk be, hogy ha $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ mérhető függvények és $\mu(A(|f_n - f| > 1/n)) < 1/n^2$ minden n-re, akkor $f_n \to f$ μ-majdnem mindenütt A-n.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM6.1. Konstruálj olyan $H \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazt, amelyre tetszőleges $a < b$ esetén $\lambda((a, b) \setminus H) > 0$ és $\lambda((a, b) \cap H) > 0$.

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an4/`
További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`