8. Valós analízis gyakorlat, 2017. április 4.

8:25–9:55+ε, D-3-306

8.1. Bizonyítsuk be Luzin tételét: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mérhető, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan ε-nál kisebb mértékű D halmaz, hogy f folytonos $[a,b] \setminus D$-n.

8.2. Bizonyítsuk be Steinhaus tételét: ha $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető, $\lambda(H) > 0$, akkor $H - H$ tartalmaz 0 körüli gömböt.

8.3. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető, véges mértékű, akkor

$$\lim_{t\to\infty} \int_A \sin(tx)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_A \cos(tx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

8.4. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz vannak olyan $I_1, \ldots, I_n$ páronként diszjunkt intervallumok és $r_1, \ldots, r_n$ racionális számok, hogy a $g = \sum r_j \chi_{I_j}$ függvényre $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

(b) Bizonyítsuk be, hogy az $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \lambda)$ tér szeparábilis.

8.5. Igazoljuk, hogy $\mathcal{L}_1$-ben az eltolás folytonos, azaz $\lim_{h\to 0} \|f(x) - f(x+h)\|_1 = 0$.

8.6. Legyen $f(x) = \chi_{(0,\infty)}, g(x) = \lceil x \rceil$. Határozzuk meg a μ_f, μ_g Lebesgue-Stieltjes mértékeket!

8.7. Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő, folytonos függvény. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges $H \subset I$-re $\overline{\mu}_f(H) = \overline{\lambda}\big(f(h)\big)$. Mutasd meg, hogy H akkor és csak akkor μ_f-mérhető, ha $f(H)$ Lebesgue-mérhető.

8.8. (a) Igazoljuk, hogy ha μ mérték egy σ-gyűrűn, akkor a σ-véges halmazok σ-gyűrűt alkotnak.

(b) Milyen σ-algebrát generálnak a σ-véges halmazok?

8.9. Legyen $A \subset \mathbb{R}$. Mi a kapcsolat az alábbi két állítás között?

(a) $\lambda(A) = 0$ (b) A minden részhalmaza Lebesgue-mérhető

8.10. (a) Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz minden intervallumot jól vág ketté (a Lebesgue külső mérték szerint). Igaz-e, hogy A mérhető?

(b) Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz minden egység hosszú intervallumot jól vág ketté (a Lebesgue külső mérték szerint). Igaz-e, hogy A mérhető?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladat

PM8.1. Tegyük fel, hogy $A \subset [0,1]$ Lebesgue-mérhető, és valahányszor $x, y \in [0,1]$ számok tizedesjegyei véges sok kivétellel megegyeznek, akkor x és y egyszerre eleme vagy nem eleme A-nak. Igazoljuk, hogy $\lambda(A) = 0$ vagy $\lambda(A) = 1$.

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an4/`
További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`