10. Valós analízis gyakorlat, 2017. április 19.

8:25–9:55+ε, D-3-306

10.1. A $[0,4\pi]$ intervallum Lebesgue mérhető halmazaira legyen

$$\vartheta(A)=\int_A \sin t\ d\lambda.$$

Határozd meg a ϑ előlejes mérték Jordan- és Hahn-felbontását.

10.2. Legyen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ valós számokból álló, abszolút konvergens sor, és tetszőleges $H \subset \mathbb{N}$ halmazra legyen $\mu(H)=\sum\limits_{n\in H} a_n$.

(a) Mutasd meg, hogy μ előjeles mérték $P(\mathbb{N})$-en.
(b) Mik a μ variációi?
(c) Mi a μ Hahn-felbontása?
(d) Mi μ-nek a számosságmértékre vonatkozó Radon-Nikodym deriváltja?

10.3. Mi a Lebesgue-mérték Radon-Nikodym deriváltja?

10.4. Nevezzünk egy μ véges Borel-mértéket folytonosnak, ha az $x \to \mu((-\infty,x))$ függvény folytonos. Mutass példát olyan mértékre, ami folytonos, de nem abszolút folytonos.

10.5. Legyenek A és B mérhető halmazok az (X,M,μ) véges mértéktérben és legyen

$$\vartheta(H)=\mu(H\cap A)-\mu(H\cap B)$$

minden $H\in M$-re. Bizonyítsuk be, hogy $\vartheta \ll \mu$, és határozzuk meg a Radon-Nikodym deriváltját!

10.6. Legyen $f: C\to[0,1]$ a Cantor-függvény. Tetszőleges $H\subset[0,1]$ Borel-halmazra legyen $\mu_1(H)=\lambda(f(H\cap C)), \mu_2(H)=\lambda(f^{-1}(H))$ és $\mu_3=\mu_1+\mu_2$ Aμ_1,μ_2,μ_3 és λ mértékek közül melyik melyikkel szinguláris, illetve melyik melyikre nézve abszolút folytonos? Mi a μ_i függvényeknek a Lebesgue mértékre vonatkozó Lebesgue-felbontása? Mi a Lebesgue-mérték μ_i-re vonatkozó Lebesgue-felbontása?

10.7. Ha μ és ϑ véges mértékek egy szigma-algebrán, akkor igazoljuk, hogy

(1) van egy olyan B mérhető halmaz, amire $\mu(B)=0$ és $\vartheta(B)$ maximális;
(2) A $\beta=\vartheta\big|_B$ mérték szinguláris;
(3) Az $\alpha=\vartheta-\beta$ mérték abszolút folytonos.

10.8. Legyen μ véges Borel mérték $\mathbb{R}$-en. Mi az összefüggéss az alábbi állítások között?

(i) $\mu \ll \lambda$
(ii) minden $x\in\mathbb{R}$-re $\mu(\{x\})=0$
(iii) μ atommentes

(Egy mértéktér atomos, ha van benne olyan pozitív mértékű halmaz, melynek nincs kisebb pozitív mértékű része.)

10.9. (a) Hány Borel halmaz van $\mathbb{R}$-ben?
(b) Igazoljuk, hogy nem minden Lebesgue-mérhető halmaz Borel!

10.10. Igaz-e, hogy minden Riemann-integrálható $[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény Borel-mérhető?

A korábbi feladatsorok itt: `http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2017tavasz-an4/`
További gyakorló feladatok: `http://mat-peldatar.elte.hu`