Tájékoztató és részletes tételjegyzék az Analízis III. vizsgához (sillabusz)

2018/2019, I. félév

Matematika BSC, II. évfolyam, matematikus szakirány

A vizsga részei:

- Felkészülés (legalább 40 perc)
- A tételjegyzék két tételének vázlatos kidolgozása és szóbeli előadása.
- Válaszadás a vizsgáztató szóbeli kérdéseire.

A vizsgán a tételjegyzéket használhatjátok, a sillabuszt nem.

Az elégséges osztályzathoz legalább ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket és definíciókat, és ezeket pontosan meg is érteni.

Ha az egyik tételre a vizsgázó tudása elégtelen, akkor az egész vizsga értékelése elégtelen.

Egyszerre 4–5 vizsgázó készülhet a teremben.

Nem kell kiöltözni, normális, hétköznapi ruhában gyertek.

Ez a tájékoztató letölthető innen:
http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3Sillabusz.pdf

A tételjegyzék pedig innen:
http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3Teteljegyzek.pdf

Részletes tételjegyzék

1. Pontsorozatok konvergenciája

Lehetséges távolság definíciók $\mathbb{R}^p$-ben. Hölder-eyenlőtlenség. Minkowski-egyenlőtlenség. $\mathbb{R}^p$, mint metrikus tér. Nyílt és zárt gömbök. Pontsorozat konvergenciája. A konvergencia ekvivalens átfogalmazásai. Véges sok elem hozzáadása/elhagyása nem változtatja meg a határértéket. A határérték egyértelmű. Konvergens sorozat részsorozata is ugyanoda tart. Linearitás. Cauchy-kritérium. Teljes metrikus tér fogalma. Bolzano-Weierstrass tétel. A $||.||_q$ és $||.||_\infty$ normák. Véges dimenziós terekben minden norma ekvivalens. [LTS2, 9–12. o.]; [KG1]

2. Ponthalmazok $\mathbb{R}^p$-ben

Halmaz belső pontja, külső pontja, határpontja, belseje, külseje, határa. Torlódási pont, izolált pont, derivált halmaz. Normafüggetlenség. Nyílt halmaz, zárt halmaz. Példák. Unió, metszet. Halmaz lezártja. Összefüggőség. Útszerű összefüggőség. $\mathbb{R}^p$-ben minden összefüggő nyílt halmaz útszerűen is összefüggő. Tartomány. Cantor tétele. Kompaktság. Lindelöf-lemma. Borel tétele. Ponthalmazok távolsága. [LTS2, 13–24. o.]

3. Többváltozós függvények határértéke és folytonossága.

$\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények véges és végtelen határértéke valamilyen halmazra szorítkozva. A határérték egyértelmű. Átviteli elv. Példák. Függvény limesz szuperiora és limesz inferiora. Határátmenetek, rendőr-elv.

Folytonosság. Folytonosság és határérték kapcsolata. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv. Szekciófüggvények. Folytonos függvény szekciófüggvényei folytonosak. A kompozíció, összeg, szorzat, hányados folytonossága. Minden polinom folytonos. Az elemi függvények folytonosak. Weierstrass tétele. Egyenletes folytonosság. Heine tétele. [LTS2, 28–37. o.]; [KG2]

4. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények differenciálása

Parciális differenciálhatóság. Iránymenti derivált. A parciális deriváltak viselkedése lokális szélsőértékhelyeken. Szélsőértékkeresés kompakt halmazon. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény differenciálhatósága. Érintősík. Összehasonlítás az egyváltozós esettel. Ha egy függvény differenciálható, akkor parciálisan is differenciálható és folytonos. Példák arra, hogy ezek nem megfordíthatóak. [LTS2, 39–48. o.]

5. A derivált és a parciális deriváltak kapcsolata.

A parciális deriváltak folytonosságából következik a differenciálhatóság. Polinomok, racionális tört függvények és elemi függvények differenciálhatósága. Differenciálható fügvény minden irányban differenciálható. Az iránymenti derivált kiszámítása. Gradiens vektor. Lagrange-középértéktétel. [LTS2, 48–56. o.]

6. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények differenciálása

A lineáris leképezés fogalma és alapvető tulajdonságai: műveletek, norma. A lineáris leképezések normált teret alkotnak. Lineáris leképezés reprezentálása mátrixszorzással. Normált valós térből normált valós vektortérbe képező függvények differenciálása. Véges dimenziók esetén a definíció nem függ a normától. A derivált egyértelmű. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény akkor és csak akkor differenciálható, ha koordinátánként differenciálható. Jacobi-mátrix, Jacobi determináns. Ha f differenciálható, akkor folytonos. Blokkmátrixok. A korábbi deriváltfogalmak összehasonlítása. [LTS2, 81–89. o.]; [KG3]

7. Differenciálási szabályok

Differenciálási szabályok: $f+g$, cf, $f \circ g$. Láncszabály. $|f|^2$, $A \cdot f(x)$, $\langle f(x), g(x) \rangle$ alakú kifejezések differenciálása. Inverz függvény differenciálása. [LTS2, 90–94. o.]; [KG3]

8. Lokális injektivitás és lokális szürjektivitás

Elégséges feltételek a lokális injektivitásra, lokális szürjektivitásra és az inverz leképezés létezésére. A nyílt leképezés tétele. [LTS2, 100–104. o.]; [KG4]

9. Inverz- és implicitfüggvény tétel

Inverzfüggvény-tétel. Implicitfüggvény-tétel. Feltételes lokális szélsőérték. Lagrange-féle multiplikátormódszer. [LTS2, 104–112. o.]; [KG4]

10. Magasabbrendű deriváltak

Magasabbrendű paricális deriváltak. Többszörös differenciálhatóság. A többszörös differenciálhatóság és a parciális deriváltak differenciálhatóságának kapcsolata. Polinomok, racionális tört függvények és elemi függvények akárhányszoros differenciálhatósága. Young tétele. A parciális deriválás sorrendjének felcserélhetősége.

A k-adik derivált mind k-lineáris forma és mint homogén k-adfokú polinom. [LTS2, 58–64. o.]

11. Taylor-polinomok

k-adik differenciál. Taylor-polinom. Az $F(a+t(b-a))$ függvény k-adik deriváltjának felírása F k-adik differenciáljával. Tayklor-formula. A Taylor-polinom hibájának nagyságrendje. [LTS2, 64–71. o.]

12. A második derivált alkalmazásai

A második differenciál mint kvadratikus alak. Hesse-mátrix. Lokális szélsőértékhelyek és a Hesse-mátrix definitségének kapcsolata. Konvex és konkáv függvények. Konvex nyílt halmazon értelemezett, kétszer differenciálható fügvény akkor és csak akkor konvex (konkáv), ha a második differenciál minden pontban pozitív (negatív) szemidefinit. [LTS2, 72–77. o.]

13. Jordan-mérték

Jordan-féle külső mérték, belső mérték és mérték. Tengelypárhuzamos téglák térfogata. A belső és a külső mérték ekvivalens definíciója a tér $1/n$ élű kockákra bontásával. A tengelypárhuzamos téglák mérhetők, és a mértékük megegyezik a térfogatukkal. A külső, illetve belső mérték szubbadditivitiása és szuperaditivitása. A külső mérték nem kisebb, mint a belső mérték. Nullmértékű halmazok és tulajdonságaik. Korlátos halmaz akkor és csak akkor mérhető, ha a határa nullmértékű. $\mathbb{R}^p$-beli kompakt halmazon folytonos függvény grafikonja $\mathbb{R}^{p+1}$-ben nullmértékű. Minden gömb és minden poliéder mérhető. Minden korlátos konvex halmaz mérhető. (Az utóbbira a csak bizonyítás vázlata.) [LTS2, 115–122. o.]

14. Jordan-mérhető halmazok

A Jordan-mérhető halmazok $\mathcal{J}$ halmazgyűrűje. A Jordan-mérték az egyetlen $\mathcal{J} \to \mathbb{R}$ függvény, ami pozitív, additív, eltolásinvariáns és normált. Jordan-mérhető halmaz λ-szorosának mértéke. Síkbeli háromszögek területe. A Cantor-halmaz és a Sierpinski-szőnyeg mértéke. [LTS2, 122–129. o.]

15. A Jordan-mérték kiszámítása

Jordan-mérhető halmaz tengelyirányú szeleteinek eggyel kisebb dimenziós külső/belső mértéke Riemann-integrálható és az integráljuk megegyezik a halmaz térfogatával. Általános henger és kúp térfogata. Gömb térfogata. Paralelepipedon térfogata. Mérhető halmaz lineáris transzformáltjának mérhetősége és mértéke. [LTS2, 129–134. o.]

16. Jordan-mérték szerinti integrál

Korlátos függvények integrálása Jordan-mérhető halmazokon. Felosztás, finomítás, finomság. Alsó és felső összegek, oszcillációs összegek. Alsó és felső integrál. Integrálhatóság és átfogalmazásai. Integrálhatóság részhalmazokon. Integrálhatóság egymásba nem nyúló halmazok unióján. Végtelenül finomodó felosztássorozathoz tartozó alsó és felső összegek az alsó, illetve a felső integrálhoz tartanak. Ha a függvény integrálható, akkor végtelenül finomodó felosztássorozathoz tartozó integrálközelítő összegek az integrálhoz tartanak. Összeg, konstansszoros, szorzat, hányados és összetett függvény integrálhatsága. Ha egy függvény korlátos és nullmértékű halmaztól eltekintve folytonos, akkor integrálható. Halmaz külső és belső mértéke azonos a karakteriszikus függvénye felső, illetve alsó integráljával. [LTS2, 149–155. o.]

17. A Jordan-mérték szerinti integrál kiszámítása

Mérhető halmazok szorzatán vett integrál felbontása az alsó és felső integrálok integráljává. A szukcesszív integrálás tétele. Az $f(x)g(y)$ alakú függvények integrálhatósága. A p-dimenziós gömb térfogata. Mérték- és integráltranszformáció (bizonyítás nélkül). Polárkoordinátás helyettesítés. Az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$ integrál kiszámítása. [LTS2, 158–167. o.]

18. Paraméteres integrálok

Paraméteres integrálok. Elégséges feltételek a paraméteres integrál folytonosságára, integrálhatóságára és differenciálhatóságára. Improprius paraméteres integrálok. Egyenletes konvergencia. Weierstrass-kritérium. Improprius paraméteres integrálok folytonossága, integrálhatósága és differenciálhatósága. A Γ és a B-függvény differenciálhatósága. [LTS2, 358–369. o.]

19. Korlátos változású függvények

Mese a megtett útról. Totális variáció, pozitív és negatív variáció. korlátos változású függvények. Minden monoton és minden Lipschitz függvény KV. Példa folytonos, de nem KV függvényre. KV függvény minden részintervallumon is KV. Additivitás. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor KV, ha két monoton függvény különbsége. Ha $f : [a, b]$ differenciálható, és f' integrálható, akkor f KV, és $V(f; [a, b]) = \int_a^b |f'|$. [LTS1, 459–464. o.]

20. Riemann-Stieltjes integrál

Mese a munkáról és a paraméteres síkgörbe alatti területről. A RS integrál definíciója. A Riemann-integrál speciális eset. Ha f-nek és g-nek van közös szakadási helye, akkor $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ nem létezik. Példa olyan folyonos f, g függvényekre, amikor $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ nem létezik. Ha g szig.mon. növő és folytonos $[a, b]$-ben, akkor $\int_a^b f \, \mathrm{d}g = \int_{g(a)}^{g(b)} f \circ g'$. Linearitás. Cauchy-kritérium. Ha $a < b < c$ és $\int_a^c f \, \mathrm{d}g$ létezik, akkor $\int_a^b f \, \mathrm{d}g + \int_b^c f \, \mathrm{d}g = \int_a^c f \, \mathrm{d}g$. Folytonos függvény integrálhatósága KV függvény szerint. Átírás Riemann-integrállá, ha az integrátor differenciálható. Parciális integrálás. Összegek átírása RS integrállá; az Abel-átrendezés és a parciális integrálás kapcsolata. Számelméleti alkalmazások. [LTS1, 468–476. o.]

21. Vonalintegrálok

Görbék. Folytonosság, differenciálhatóság, Lipschitz-tulajdonság, stb. Görbe hossza, rektifikálható görbe. Átparaméterezés és megfordítás. Kettévághatóság. Egy görbe akkor és csak akkor rektifikálható, ha a koordinátafüggvényei korlátos változásúak. Függetenség a paraméterezéstől, linearitás és additivitás. Átírások Riemann-Stieltjes, illetve Riemann-integrállá. Elégséges feltétel a vonalintegrál létezésére. Differenciálható görbe hosszának kiszámítása. Az integrál kiszámítása differenciálható görbén. Triviális felső becslés a vonalintegrál nagyságára. Vonalintegrálok. Tulajdonságok. Feltételek a létezésre. Átírás Riemann-integrállá, ha az integrációs út differenciálható. [LTS2, 177–182. o.]

22. Folytonos vektormező primitív függvénye

Newton-Leibniz formula valós vonalintegrálokra. Konzervatív vektormező, primitív függvény és potenciálfüggvény fogalma. A primitív függvény konstans erejéig egyértelmű. Ha $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő nyílt, és $f : G \to \mathbb{R}^p$ folytonos, akkor a következők ekvivalensek: (a) f-nek létezik primitív függvénye; (b) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt, folytonos, rektifikálható görbén; (c) f vonalintegrálja nulla minden G-ben fekvő zárt töröttvonalon. [LTS2, 182–188. o.]

23. Differenciálható vektormező primitív függvénye

Differenciálható f esetén a primitív függvény létezéséhez szükséges, hogy f' mindenhol szimmetrikus legyen. A lineáris leképezés primitív függvénye. Goursat-lemma valós vonalintegrálokra. A primitív függvény létezése konvex és csillagszerű tartományokon. [LTS2, 189–194. o.]

24. Homotópia és vonalintegrál

Homotóp görbék. A vonalintegrál azonos végpontú, zárt, illetve nullhomotóp görbéken. Egyszeresen összefüggő tartomány. A primitív függvény létezése egyszeresen összefüggő tartományokon. Példák egyszeresen összefüggő és nem egyszeresen összefüggő tartományokra, és olyan függvényekre, amelyeknek lokálisan létezik, de globálisan nem létezik primitív függvénye. Zárt vezető mágneses örvényerőssége és a Gauss-féle összekapcsolódásái szám kapcsolata. [LTS2, 194–198. o.], [KG5]

Hivatkozások

[LTS1] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis I. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[KG1] K.G.: Normák $\mathbb{R}^p$-ben,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_01_normak.pdf

[KG2] K.G.: Többváltozós függvények alsó és felső határértéke,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_02_limsup.pdf

[KG3] K.G.: Vektorértékű függvények differenciálása,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_03_VektorErtekuFvek.pdf,
https://www.youtube.com/watch?v=r2nQ87xP5rE

[KG4] K.G.: Inverz- és implicitfüggvény-tétel,
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_04_InvImplFv.pdf,
https://www.youtube.com/watch?v=5HiQlIkLhQI

[KG5] K.G.: Mágneses örvényerősség és összehurkolódási szám
https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_05_OsszeHurka.pdf