An3 jegyzetek

(Utolsó módosítás: 2018. december 10., 10:13)

Hivatkozások

Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

1. Normák $\mathbb{R}^p$-ben

1.1. definíció. *Az $\|.\| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény "norma", ha*

- *Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ esetén $\|x\| \geq 0$, és $\|x\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0^p$.*
- *Bármely $x, y \in \mathbb{R}^p$ esetén $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*
- *Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ vektor és $c \in \mathbb{R}$ esetén $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$.*

1.2. definíció. *$0 \leq q < \infty$ és $x \in \mathbb{R}^p$ esetén legyen*

$$\|x\|_q = \left(|x_1|^p + \ldots + |x_p|^q\right)^{1/q}$$

és legyen

$$\|x\|_\infty = \max |x_i|.$$

Vegyük észre, hogy $\|x\|_2 = |x|$ és $\|x\|_\infty = \lim_{q\to\infty} \|x\|_q$.

1.3. tétel (Hölder-egyenlőtlenség). *Ha $1 \leq q, r \leq \infty$ és $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, akkor tetszőleges $a_1, \ldots, a_p$ és $b_1, \ldots, b_p$ számokra*

$$\|a\|_q \cdot \|b\|_r = \left(|a_1|^q + \ldots + |a_p|^q\right)^{1/q} \cdot \left(|b_1|^q + \ldots + |b_p|^r\right)^{1/r} \geq |a_1 b_1| + \ldots + |a_p b_p|.$$

Bizonyítás. Ha a vagy b a nullvektor, akkor mindkét oldal 0, és kész.
Ha $q = 1$ és $r = \infty$, akkor trivi:

$$B.O. = \left(|a_1| + \ldots + |a_p|\right) \cdot \max |b_i| \geq J.O.$$

Marad az, ha $1 < q, r < \infty$ és egyik vektor sem 0.

Az egyenlőtlenség homogén; az a és a b vektort is végigoszthatjuk egy-egy számmal, és ekvivalens állítást kapunk. Tehát feltételezhetjük, hogy $\|a\|_q = 1$ és $\|b\|_r = 1$. Írjuk fel a súlyozott számtani-mértanit az $|a_i|^q$ és $|b_i|^r$ számokra $1/q$ és $1/r$ súlyokkal:

$$|a_i b_i| = \left(|a_i|^q\right)^{1/q} \left(|b_i|^r\right)^{1/r} \leq \frac{1}{q}|a_i|^q + \frac{1}{r}|b_i|^r;$$

összegezve

$$\sum |a_i b_i| \leq \frac{1}{q} \sum |a_i|^q + \frac{1}{r} \sum |b_i|^r = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 = \|a\|_q \cdot \|b\|_r.$$

1.4. tétel (Minkowski-egyenlőtlenség). *Ha $1 \leq q \leq \infty$ és $a, b \in \mathbb{R}^p$, akkor*

$$\|a + b\|_q \leq \|a\|_q + \|b\|_q.$$

Bizonyítás. Ha $q = \infty$, akkor trivi:

$$\|a+b\|_\infty = \max|a_i + b_i| \le \max\big(|a_i| + |b_i|\big) \le \max|a_i| + \max|b_i| = \|a\|_\infty + \|b\|_\infty.$$

Ha $q = 1$, akkor is trivi:

$$\|a+b\|_1 = \sum \big|a_i + b_i\big| \le \sum \big(|a_i| + |b_i|\big) = \|a\|_1 + \|b\|_1.$$

Ha $a + b = 0$, akkor is trivi.

Marad az, ha $1 < q < \infty$ és $a + b \neq 0$. Legyen $r = \frac{q}{q-1}$ a q *konjugált kitevőpárja*, amelyre $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

$$\|a+b\|_q{}^q = \sum |a_i + b_i|^q = \sum \big(|a_i + b_i| \cdot |a_i + b_i|^{\frac{q}{r}}\big) \le \sum |a_i| \cdot |a_i + b_i|^{\frac{q}{r}} + \sum |b_i| \cdot |a_i + b_i|^{\frac{q}{r}} \overset{\text{Hölder } 2\times}{\le}$$
$$\le \Big(\sum |a_i|^q\Big)^{1/q} \Big(\sum |a_i + b_i|^q\Big)^{1/r} + \Big(\sum |b_i|^b\Big)^{1/q} \Big(\sum |a_i + b_i|^q\Big)^{1/r} = \big(\|a\|_q + \|b\|_q\big) \cdot \|a+b\|_q{}^{q-1}.$$

Végül leosztjunk.

1.5. következmény. *A Minkowski-egyenlőtlenség szerint $\|.\|_q$ norma minden $1 \le q \le \infty$ esetén.*

1.6. megjegyzés. $0 < q < 1$ *esetén de nem igaz a háromszög-egyenlőtlenség; pl.* 2*-dimenzióban* $\|(1,1)\|_q = 2^{1/q} > 2 = \|(1,0)\|_1 + \|(0,1)\|_1$.

1.7. tétel. *Bármely $\|.\|$ normához léteznek olyan $K_1, K_2 > 0$ számok, hogy bármely $x \in \mathbb{R}^p$ vektorra*

$$K_1|x| \le \|x\| \le K_2|x|.$$

Bizonyítás. A felső becslés: legyenek a koordináta-egységvektorok $e_1, \ldots, e_p$. Ekkor

$$\|x\| = \|x_1e_1 + \ldots + x_pe_p\| \le \|x_1e_1\| + \ldots + \|x_pe_p\| = |x_1| \cdot \|e_1\| + \ldots + |x_p| \cdot \|e_p\| \le$$
$$\le |x| \cdot \|e_1\| + \ldots + |x| \cdot \|e_p\| = \big(\|e_1\| + \ldots + \|e_p\|\big) \cdot |x|,$$

Tehát például $K_2 = \|e_1\| + \ldots + \|e_p\|$ megfelelő.

Az alsó becsléshez tegyük fel indirekt, hogy nincs ilyen K_1. Ezek szerint minden pozitív egészre $K_1 = \frac{1}{n}$ nem jó, vagyis van olyan x_n vektor, amelyre $\|x_n\| < \frac{1}{n}|x_n|$. Az x_n nem lehet a nullvektor, és így a skálázhatóság miatt felthetjük, hogy $|x_n| = 1$.

Az Bolzano-Weierstrass tétel miatt a korlátos x_n sorozatnak van egy konvergens x_{n_k} részsorozata. Ennek limesze legyen c. A részsorozat koordinátánként c-hez tart; az abszolútérték definíciója miatt $|c| = \lim |x_{n_k}| = 1$. A lényeg, hogy c nem lehet a nullvektor, ezért a normája szigorúan pozitív: $|c| > 0$.

A részsorozatban $|x_{n_k} - c| \to 0$. A már bizonyított felső becslés szerint $0 \le \|x_{n_k} - c\| \le K_2|x_{n_k} - c|$; a rendőr-elv miatt $\|x_{n_k} - c\| \to 0$. Ezek után

$$0 < \|c\| \le \|x_{n_k}\| + \|c - x_{n_k}\| < \frac{1}{n_k} + K_2|c - x_{n_k}| \to 0,$$

ellentmondás.

1.8. következmény. *A pontsorozatok konvergenciája, belső/külső/határpont, a nyílt/zárt halmaz tulajdonság nem függ attól, hogy melyik normát használjuk. Bármelyik normát is használjuk, ugyazok a sorozatok lesznek konvergensek, és ugyanazok a halmazok lesznek nyíltak vagy éppen zártak.*