An3 jegyzetek

(Utolsó módosítás: 2018. december 10., 10:14)

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

2. Többváltozós függvények alsó és felső határértéke

2.1. definíció. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$, a az A halmaz torlódási pontja, és f olyan p-változós, valós értékű függvény, ami valamilyen $r > 0$ esetén értelmes a $\dot{B}(a, r_0) \cap A$ halmazon.*

Az f függvény felső határértéke avagy limesz szuperiora az a pontban, az A halmazra szorítkozva

$$\limsup_{\substack{x \to a \\ a \in A}} f(x) = \overline{\lim_{a,A}} f(x) = \lim_{r \to 0+} \sup f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big) = \inf_{r>} \sup f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big).$$

Megjegyzés. A $\dot{B}(a,r) \cap A$ biztosan nem üres, mert a torlódási pont. Nagyobb r-hez bővebb $\dot{B}(a,r) \cap A$ és $f\big(\dot{B}(a,r) \cap A\big)$ halmazt kapunk, ezért az $r \mapsto f\big(\dot{B}(a,r) \cap A\big)$ függvény (nem szig.) monoton növekvő. Az értéke (a szuprémum) $+\infty$ is lehetm de ettől még tudunk határértlket venni. A monotonitás miatt a határérték egyenlő az infimummal.

Az f függvény alsó határértéke avagy limesz inferiora az a pontban, az A halmazra szorítkozva

$$\liminf_{\substack{x \to a \\ a \in A}} f(x) = \underline{\lim_{a,A}} f(x) = \lim_{r \to 0+} \inf f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big) = \sup_{r>} \inf f\Big(\dot{B}(a,r) \cap A\Big).$$

2.2. lemma.

1a. Ha $\limsup\limits_{a,A} f > \alpha$, akkor $\forall r > 0\ \exists x \in \dot{B}(a,r)\ f(x) > \alpha$.

1b. Ha $\limsup\limits_{a,A} f < \beta$, akkor $\exists r > 0\ \ \forall x \in \dot{B}(a,r)\ f(x) < \beta$.

2a. Ha $\liminf\limits_{a,A} f > \alpha$, akkor $\exists r > 0\ \ \forall x \in \dot{B}(a,r)\ f(x) > \alpha$.

2b. Ha $\liminf\limits_{a,A} f < \beta$, akkor $\forall r > 0\ \exists x \in \dot{B}(a,r)\ f(x) < \beta$.

Bizonyítás. 1a: $\inf\limits_r \sup f\big(\dot{B}(a) \cap A\big) > \alpha$, tehát bármely $r > 0$ esetén $\sup f\big(\dot{B}(a) \cap A\big) > \alpha$.

1b: $\inf\limits_r \sup f\big(\dot{B}(a) \cap A\big) < \beta$, tehát van olyan $r > 0$, amire $\sup f\big(\dot{B}(a) \cap A\big) < \beta$.

2a,2b ugyanúgy.

2.3. tétel. $\liminf\limits_{a,A} f \le \limsup\limits_{a,A} f$, *és*

$\liminf\limits_{a,A} f = \limsup\limits_{a,A} f = \alpha$ *akkor és csak akkor, ha* $\lim\limits_{a,A} f = \alpha$.

Az $\alpha = \pm\infty$ eseteket úgy is lehet írni hogy

- $\lim\limits_{a,A} f = +\infty$ *akkor és csak akkor, ha* $\liminf\limits_{a,A} f = +\infty$;
- $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$ *akkor és csak akkor, ha* $\limsup\limits_{a,A} f = -\infty$.

Bizonyítás. Az első állítás trivi az 2.1. definícióból: $\inf f\Big(\dot{B}(a,r)\cap A\Big) \le \sup f\Big(\dot{B}(a,r)\cap A\Big)$, majd $r\to 0+$ határátmenet.

1. eset: $\alpha=-\infty$. Az . lemma matt ha $\limsup\limits_{a,A} f=-\infty$, akkor minden K számhoz van olyan $r>0$, hogy $x\in\dot{B}(a,r)\cap A$ esetén $f(x)<K$. Ez pedig éppen annak definíciója, hogy $\lim\limits_{a,A} f=-\infty$.

Megfordítva, ha $\lim\limits_{a,A} f=-\infty$, akkor minden K számhoz van olyan $r>0$, hogy $x\in\dot{B}(a,r)\cap A$ esetén $f(x)<K$. Ekkor viszont $\limsup\limits_{a,A} f\le \sup f(\dot{B}(a,r)\cap A)\le K$. Ez minden K számra igaz, tehát $\limsup\limits_{a,A} f=-\infty$.

2. eset: $\alpha=+\infty$. ugyanúgy, mint az 1. esetben.

3. eset: α véges.

Ha $\liminf\limits_{a,A} f=\limsup\limits_{a,A} f=\alpha$, akkor az . lemma matt minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan r_1 és r_2, hogy bármely $x\in\dot{B}(a,r_1)\cap A$ esetén $f(x)>\alpha-\varepsilon>0$, illetve bármely $x\in\dot{B}(a,r_2)\cap A$ esetén $f(x)<\alpha+\varepsilon>0$. Vegyük a két sugár közül a kisebbet: legyen $\delta=\min(r_1,r_2)$. Ekkor tehát bármely $x\in\dot{B}(a,\delta)\cap A$ esetén $\alpha-\varepsilon<f(x)<\alpha+\varepsilon>0$; ez viszont éppen annak a definíciója, hogy $\lim\limits_{a,A} f=\alpha$.

Megfordítva, ha $\lim\limits_{a,A} f=\alpha$, akkor bármely $\varepsilon>0$-hoz van olyan $r>0$, hogy $x\in\dot{B}(a,\delta)\cap A$ esetén $\alpha-\varepsilon<f(x)<\alpha+\varepsilon>0$; ekkor viszont

$$\alpha-\varepsilon\le\inf f(\dot{B}(a,\delta)\le\liminf_{a,A} f\le\limsup_{a,A} f\le\sup f(\dot{B}(a,\delta)\le\alpha+\varepsilon.$$

Tehát

$$\forall\varepsilon>0\qquad \alpha-\varepsilon\le\liminf_{a,A} f\le\limsup_{a,A} f\le\alpha+\varepsilon.$$

2.4. tétel. *Legyen*

$$L=\Big\{\lim f(x_n): x_n\in A, x_n\ne a, x_n\to a\Big\}\subset[-\infty,+\infty].$$

Ekkor $\limsup\limits_{\substack{x\to a\\ a\in A}} f(x)=\max L$ *és* $\liminf\limits_{\substack{x\to a\\ a\in A}} f(x)=\min L$.

Bizonyítás. Elég a limsupra.

Először azt igazoljuk, hogy $\limsup\limits_{a,A} f\in L$.

1. eset: $\limsup\limits_{a,A} f=b$ véges. Minden pozitív egész n-hez vegyünk egy olyan x_n pontot, amelyre $x_n\in\dot{B}(a,\frac{1}{n})\cap A$ és $b-\frac{1}{n}<f(x_n)<b+\frac{1}{n}$. Ilyen létezik, mert a 2. Lemma 1b miatt minden elég közeli pontban $f(x_n)<b+\frac{1}{n}$, és a 2. Lemma 1a miatt az elég közeliek között van olyan pont, amelyre $f(x_n)>b-\frac{1}{n}$ is igaz. A rendőr-elv miatt $f(x_n)\to b$, így $b\in L$.

2. eset: $\limsup\limits_{a,A} f=+\infty$ véges. Minden pozitív egész n-hez vegyünk egy olyan x_n pontot, amelyre $x_n\in\dot{B}(a,\frac{1}{n})\cap A$ és $f(x_n)>n$.

3. eset: $\limsup\limits_{a,A} f=-\infty$ véges. Minden pozitív egész n-hez vegyünk egy olyan x_n pontot, amelyre $x_n\in\dot{B}(a,\frac{1}{n})\cap A$ és $f(x_n)<-n$.

Másodszor, az kell, hogy L-nek nincs $\limsup\limits_{a,A} f$-nél nagyobb eleme. Tegyük fel indirekt, hogy mégis van egy $\beta\in L$, amire $\beta>\limsup\limits_{a,A} f$. A β-hoz van egy $x_n\in A$ sorozat, amely a-hoz tart, $x_n\ne a$ és $f(x_n)\to\beta$. Vegyünk még egy c számot, amire $\limsup\limits_{a,A} f<c<\beta$. A lemma 1b szerint van olyan $r>0$, hogy $x\in\dot{B}(a,r)\cap A$ esetén $f(x)<c$. Mivel $x_n\to a$, véges sok kivétellel minden x_n ilyen. Tehát véges sok kkivétellel $f(x_n)<c$, de ez ellentmond annak, hogy $f(x_n)$ a c-nél nagyobb β-hoz tart.

2.5. következmény (átviteli elv). $\lim\limits_{a,A} f = \alpha$ *akkor és csak akkor, ha bármely* $x_n \in A \setminus \{a\}$ *sorozatra, ha* $x_n \to a$, *akkor* $f(x_n) \to \alpha$.

2.6. tétel (határátmenet). *Ha valamilyen* $r > 0$*-re* $x \in \dot{B}(a.r) \cap A$ *esetén* $f(x) \leq g(x)$, *akkor* $\liminf\limits_{a,A} f \leq \liminf\limits_{a,A} g$, *és* $\limsup\limits_{a,A} f \leq \limsup\limits_{a,A} g$.

Bizonyítás. Az 2.1. definícióból triviális.

2.7. következmény (rendőr- és honvéd/csősz-elvek).

(a) Ha a $\dot{B}(a,r) \cap A$ *halmazon* $f \leq g \leq h$ *és* $\lim\limits_{a,A} f = \lim\limits_{a,A} h = c$, *akkor* $\lim\limits_{a,A} g = c$.

(b) Ha a $\dot{B}(a,r) \cap A$ *halmazon* $f \leq g$ *és* $\lim\limits_{a,A} f = \infty$, *akkor* $\lim\limits_{a,A} g = \infty$.

(c Ha a $\dot{B}(a,r) \cap A$ *halmazon* $f \leq g$ *és* $\lim\limits_{a,A} g = -\infty$, *akkor* $\lim\limits_{a,A} f = -\infty$.