Vektorértékű függvények differenciálása

(Analízis 3 előadás, ELTE TTK matematikus)

2018. október 1.

PDF: `https://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2018osz-an3/An3_03_VektorErtekuFvek.pdf`

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

$$A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q); \quad A(c \cdot x) = c \cdot A(x); \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

$$A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q); \quad A(c \cdot x) = c \cdot A(x); \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$$

Reprezentáció

$$A(x) = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_q(x) \end{pmatrix}$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

$$A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q); \quad A(c \cdot x) = c \cdot A(x); \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$$

Reprezentáció mátrixszorzással

$$A(x) = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

$$A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q); \quad A(c \cdot x) = c \cdot A(x); \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$$

Reprezentáció mátrixszorzással

$$A(x) = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = Ax$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

$$A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q); \quad A(c \cdot x) = c \cdot A(x); \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$$

Reprezentáció mátrixszorzással

$$A(x) = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_q(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix}}_{q \times p} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = Ax$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

$$A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q); \quad A(c \cdot x) = c \cdot A(x); \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$$

Reprezentáció mátrixszorzással

$$A(x) = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_q(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix}}_{q \times p} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = Ax$$

DEF. Lineáris leképezés vagy mátrix normája:

$$\|A\|$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

$$A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q); \quad A(c \cdot x) = c \cdot A(x); \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$$

Reprezentáció mátrixszorzással

$$A(x) = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_q(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix}}_{q \times p} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = Ax$$

DEF. Lineáris leképezés vagy mátrix normája:

$$\|A\| = \sup \left\{ \left|Ax\right| : \ |x| = 1 \right\}$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

$$A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q); \quad A(c \cdot x) = c \cdot A(x); \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$$

Reprezentáció mátrixszorzással

$$A(x) = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_q(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix}}_{q \times p} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = Ax$$

DEF. Lineáris leképezés vagy mátrix normája:

$$\|A\| = \sup \Big\{ \big|Ax\big| : \ |x| = 1 \Big\} = \max \Big\{ \big|Ax\big| : \ |x| = 1 \Big\}$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

$$A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q); \quad A(c \cdot x) = c \cdot A(x); \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$$

Reprezentáció mátrixszorzással

$$A(x) = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \\ \vdots \\ \ell_q(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix}}_{q \times p} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = Ax$$

DEF. Lineáris leképezés vagy mátrix normája:

$$\|A\| = \sup \Big\{ \big|Ax\big| : \ |x| = 1 \Big\} = \max \Big\{ \big|Ax\big| : \ |x| = 1 \Big\}$$

Trivi. Tetsz. x vektorra $|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

Tétel. A mátrixnorma tényleg norma:

$$\|A\| \geq 0 \text{ és } \|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$$
$$\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$$
$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

Tétel. A mátrixnorma tényleg norma:

$$\|A\| \geq 0 \text{ és } \|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$$
$$\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$$
$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Biz.

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

Tétel. A mátrixnorma tényleg norma:

$$\|A\| \geq 0 \text{ és } \|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$$
$$\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$$
$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Biz. Az első három triviális.

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

Tétel. A mátrixnorma tényleg norma:

$$\|A\| \geq 0 \text{ és } \|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$$
$$\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$$
$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Biz. Az első három triviális.

Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ egységvektorra

$$|(A + B)x|$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

Tétel. A mátrixnorma tényleg norma:

$\|A\| \geq 0$ és $\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$

$\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Biz. Az első három triviális.

Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ egységvektorra

$$|(A + B)x| \leq |Ax| + |Bx|$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

Tétel. A mátrixnorma tényleg norma:

$\|A\| \geq 0$ és $\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$

$\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Biz. Az első három triviális.

Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ egységvektorra

$$|(A + B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \|A\| + \|B\|$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

Tétel. A mátrixnorma tényleg norma:

$\|A\| \geq 0$ és $\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$

$\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Biz. Az első három triviális.

Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ egységvektorra

$$|(A+B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \|A\| + \|B\|$$

Tehát

$$\|A + B\| = \sup\left\{\left|(A+B)x\right| : \; |x| = 1\right\}$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

Tétel. A mátrixnorma tényleg norma:

$\|A\| \geq 0$ és $\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$

$\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Biz. Az első három triviális.

Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ egységvektorra

$$|(A+B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \|A\| + \|B\|$$

Tehát

$$\|A+B\| = \sup\left\{\left|(A+B)x\right| : \; |x| = 1\right\} \leq \|A\| + \|B\|.$$

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

Tétel. A mátrixnorma tényleg norma:

$$\|A\| \geq 0 \text{ és } \|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$$
$$\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$$
$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Biz. Az első három triviális.

Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ egységvektorra

$$|(A+B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \|A\| + \|B\|$$

Tehát

$$\|A + B\| = \sup\left\{\left|(A+B)x\right| : \; |x| = 1\right\} \leq \|A\| + \|B\|.$$

A $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ tér a mátrixnormával egy normált lineáris tér.

Lineáris $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezések

Tétel. A mátrixnorma tényleg norma:

$$\|A\| \geq 0 \text{ és } \|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$$
$$\|c \cdot A\| = |c| \cdot \|A\|$$
$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Biz. Az első három triviális.

Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely $x \in \mathbb{R}^p$ egységvektorra

$$|(A+B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \|A\| + \|B\|$$

Tehát

$$\|A+B\| = \sup\left\{\left|(A+B)x\right| : \; |x| = 1\right\} \leq \|A\| + \|B\|.$$

A $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ tér a mátrixnormával egy normált lineáris tér. (Igazából bármelyik normát használhatnánk, csak ezzel könnyű lesz számolni.)

Differenciálhatóság

DEF.

Differenciálhatóság

DEF. $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$.

Differenciálhatóság

DEF. $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$.
Az f függvény differenciálható az a pontban, ha van olyan $A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés, amelyre

Differenciálhatóság

DEF. $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$.
Az f függvény differenciálható az a pontban, ha van olyan $A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés, amelyre

(a) $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0_q$$

Differenciálhatóság

DEF. $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$.
Az f függvény differenciálható az a pontban, ha van olyan $A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés, amelyre

(a)
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0_q$$

(b) Valamilyen vektorértékű $\varepsilon(x)$ függvénnyel

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|, \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0_q$$

Differenciálhatóság

DEF. $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$.
Az f függvény differenciálható az a pontban, ha van olyan $A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés, amelyre

(a)
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0_q$$

(b) Valamilyen vektorértékű $\varepsilon(x)$ függvénnyel

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|, \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0_q$$

(c) Valamilyen vektorértékű $\varepsilon(x)$ függvénnyel

$f(x) = f(a) + A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|$, ε folytonos a-ban és $\varepsilon(a) = 0_q$

Differenciálhatóság

Soronként írva,

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) + \ell_1(x-a) + \varepsilon_1(x) \cdot |x-a| \\ f_2(a) + \ell_2(x-a) + \varepsilon_2(x) \cdot |x-a| \\ \vdots \\ f_q(a) + \ell_q(x-a) + \varepsilon_q(x) \cdot |x-a| \end{pmatrix}$$

Differenciálhatóság

Soronként írva,

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) + \ell_1(x-a) + \varepsilon_1(x) \cdot |x-a| \\ f_2(a) + \ell_2(x-a) + \varepsilon_2(x) \cdot |x-a| \\ \vdots \\ f_q(a) + \ell_q(x-a) + \varepsilon_q(x) \cdot |x-a| \end{pmatrix}$$

f differenciálható

$\iff$ az ε vektorfüggvény folytonos a-ban és $\varepsilon(a) = 0_q$

Differenciálhatóság

Soronként írva,

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) + \ell_1(x-a) + \varepsilon_1(x) \cdot |x-a| \\ f_2(a) + \ell_2(x-a) + \varepsilon_2(x) \cdot |x-a| \\ \vdots \\ f_q(a) + \ell_q(x-a) + \varepsilon_q(x) \cdot |x-a| \end{pmatrix}$$

f differenciálható

$\iff$ az ε vektorfüggvény folytonos a-ban és $\varepsilon(a) = 0_q$

$\iff$ mindegyik ε_j függvény folytonos a-ban és $\varepsilon_j(a) = 0$

Differenciálhatóság

Soronként írva,

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) + \ell_1(x-a) + \varepsilon_1(x) \cdot |x-a| \\ f_2(a) + \ell_2(x-a) + \varepsilon_2(x) \cdot |x-a| \\ \vdots \\ f_q(a) + \ell_q(x-a) + \varepsilon_q(x) \cdot |x-a| \end{pmatrix}$$

f differenciálható
$\iff$ az ε vektorfüggvény folytonos a-ban és $\varepsilon(a) = 0_q$
$\iff$ mindegyik ε_j függvény folytonos a-ban és $\varepsilon_j(a) = 0$
$\iff$ mindegyik f_j differenciálható, és a deriváltja az ℓ_j lineáris függvény.

Differenciálhatóság

Soronként írva,

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) + \ell_1(x-a) + \varepsilon_1(x) \cdot |x-a| \\ f_2(a) + \ell_2(x-a) + \varepsilon_2(x) \cdot |x-a| \\ \vdots \\ f_q(a) + \ell_q(x-a) + \varepsilon_q(x) \cdot |x-a| \end{pmatrix}$$

f differenciálható
$\iff$ az ε vektorfüggvény folytonos a-ban és $\varepsilon(a) = 0_q$
$\iff$ mindegyik ε_j függvény folytonos a-ban és $\varepsilon_j(a) = 0$
$\iff$ mindegyik f_j differenciálható, és a deriváltja az ℓ_j lineáris függvény.

A számértékű függvényeknél láttuk, hogy az $\ell_j(x)$ lineáris függvény egyértelmű, és az együtthatói (ha tetszik, koordinátái) az f_j függvény parciális deriváltjai az a pontban:

$$\ell_j(x) = D_1 f_j(a) \cdot x_1 + D_2 f_j(a) \cdot x_2 + \cdots + D_p f_j(a) \cdot x_p.$$

Differenciálhatóság

Ezek után az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés egyértelmű, és a mátrixa

Differenciálhatóság

Ezek után az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés egyértelmű, és a mátrixa

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix}$$

Differenciálhatóság

Ezek után az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés egyértelmű, és a mátrixa

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_q(a) \end{pmatrix}$$

Differenciálhatóság

Ezek után az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés egyértelmű, és a mátrixa

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_q(a) \end{pmatrix}$$

DEF. Neve: az f leképezés a pontbeli Jacobi-mátrixa; jele $Jf(a)$.

Differenciálhatóság

Ezek után az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés egyértelmű, és a mátrixa

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_q(a) \end{pmatrix}$$

DEF. Neve: az f leképezés a pontbeli Jacobi-mátrixa; jele $Jf(a)$.

A most már egyértelmű $A(x)$ leképezést hívjuk az f leképezés a-beli deriváltjának,

Differenciálhatóság

Ezek után az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés egyértelmű, és a mátrixa

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_q(a) \end{pmatrix}$$

DEF. Neve: az f leképezés a pontbeli Jacobi-mátrixa; jele $Jf(a)$.

A most már egyértelmű $A(x)$ leképezést hívjuk az f leképezés a-beli deriváltjának, és jelölhetjük így: $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.

Differenciálhatóság

Ezek után az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés egyértelmű, és a mátrixa

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_q(a) \end{pmatrix}$$

DEF. Neve: az f leképezés a pontbeli Jacobi-mátrixa; jele $Jf(a)$.

A most már egyértelmű $A(x)$ leképezést hívjuk az f leképezés a-beli deriváltjának, és jelölhetjük így: $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$. A definícióba beírva ezt a jelölést,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

Differenciálhatóság

Ezek után az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés egyértelmű, és a mátrixa

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_q(a) \end{pmatrix}$$

DEF. Neve: az f leképezés a pontbeli Jacobi-mátrixa; jele $Jf(a)$.

A most már egyértelmű $A(x)$ leképezést hívjuk az f leképezés a-beli deriváltjának, és jelölhetjük így: $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$. A definícióba beírva ezt a jelölést,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

Ezek után a p-változós f' derivált leképezés hova is képez?

Differenciálhatóság

Ezek után az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ lineáris leképezés egyértelmű, és a mátrixa

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, f_1(a) \\ \mathrm{grad}\, f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\, f_q(a) \end{pmatrix}$$

DEF. Neve: az f leképezés a pontbeli Jacobi-mátrixa; jele $Jf(a)$.

A most már egyértelmű $A(x)$ leképezést hívjuk az f leképezés a-beli deriváltjának, és jelölhetjük így: $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$. A definícióba beírva ezt a jelölést,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

Ezek után a p-változós f' derivált leképezés hova is képez? Hát a $p \cdot q$ dimenziós $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ vektortérbe...

Differenciálhatóság

Ha valaki szereti a vektor magicet, a Jacobi-mátrixot ilyen vicces szorzat alakokban is írhatja:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \operatorname{grad} f_2(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_q(a) \end{pmatrix}$$

Differenciálhatóság

Ha valaki szereti a vektor magicet, a Jacobi-mátrixot ilyen vicces szorzat alakokban is írhatja:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \operatorname{grad} f_2(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_q(a) \end{pmatrix} = \operatorname{grad} \cdot \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_q(a) \end{pmatrix}$$

Differenciálhatóság

Ha valaki szereti a vektor magicet, a Jacobi-mátrixot ilyen vicces szorzat alakokban is írhatja:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \operatorname{grad} f_2(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_q(a) \end{pmatrix} = \operatorname{grad} \cdot \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_q(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_q(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \dots & D_p \end{pmatrix}$$

Differenciálhatóság

Tétel. Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor f folytonos a-ban.

Differenciálhatóság

Tétel. Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor f folytonos a-ban.

Tétel. Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor f mindegyik f_j koordinátafüggvényének mindegyik változó szerinti parciális deriváltja létezik és véges az a pontban.

Differenciálhatóság

Tétel. Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor f folytonos a-ban.

Tétel. Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor f mindegyik f_j koordinátafüggvényének mindegyik változó szerinti parciális deriváltja létezik és véges az a pontban.

Tétel. Ha az a pont egy környezetében az f mindegyik f_j koordinátafüggvénye parciálisan differenciálható, és mindegyik $D_i f_j$ parciális derivált folytonos az a pontban, akkor f differenciálható a-ban.

Differenciálhatóság

Tétel. Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor f folytonos a-ban.

Tétel. Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor f mindegyik f_j koordinátafüggvényének mindegyik változó szerinti parciális deriváltja létezik és véges az a pontban.

Tétel. Ha az a pont egy környezetében az f mindegyik f_j koordinátafüggvénye parciálisan differenciálható, és mindegyik $D_i f_j$ parciális derivált folytonos az a pontban, akkor f differenciálható a-ban.

DEF. Ha az a pont egy környezetében az f minden pontban differenciálható, és mindegyik $D_i f_j$ parciális derivált folytonos az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy f folytonosan differenciálható az a pontban.

Avagy, a $q \times p$-es mátrix értékű deriváltfüggvény akkor és csak akkor folyt. a-ban, ha minden koordinátafüggvénye, vagyis az összes $D_i f_j(x)$ folyt. a-ban.

Differenciálhatóság

Példa. Legyen $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

Differenciálhatóság

Példa. Legyen $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, ... pontosabban

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

Differenciálhatóság

Példa. Legyen $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, ... pontosabban

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

A parciális deriváltak:

$$D_x f_1(x, y) = e^x \cos y; \qquad D_y f_1(x, y) = -e^x \sin y;$$

$$D_x f_2(x, y) = e^x \sin y; \qquad D_y f_2(x, y) = e^x \cos y.$$

Differenciálhatóság

Példa. Legyen $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, ... pontosabban

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

A parciális deriváltak:

$$D_x f_1(x, y) = e^x \cos y; \qquad D_y f_1(x, y) = -e^x \sin y;$$

$$D_x f_2(x, y) = e^x \sin y; \qquad D_y f_2(x, y) = e^x \cos y.$$

A Jacobi-mátrix az $\binom{a}{b}$ pontban

$$Jf\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}.$$

Differenciálhatóság

Példa. Legyen $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, ... pontosabban

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

A parciális deriváltak:

$$D_x f_1(x,y) = e^x \cos y; \qquad D_y f_1(x,y) = -e^x \sin y;$$

$$D_x f_2(x,y) = e^x \sin y; \qquad D_y f_2(x,y) = e^x \cos y.$$

A Jacobi-mátrix az $\binom{a}{b}$ pontban

$$Jf\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}.$$

A függvény deriváltja az $\binom{a}{b}$ pontban az

$$f'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^a \cos b \cdot x \ - \ e^a \sin b \cdot y \\ e^a \sin b \cdot x \ + \ e^a \cos b \cdot y \end{pmatrix}$$

lineáris leképezés.

Differenciálhatóság

Ez a differenciálhatóságfogalom közös általánosítása a korábbi deriváltfogalmaknak:

Differenciálhatóság

Ez a differenciálhatóságfogalom közös általánosítása a korábbi deriváltfogalmaknak:

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény: $f'(x)$ egy szám (meredekség) vagy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris függvény vagy 1×1-es mátrix	

Differenciálhatóság

Ez a differenciálhatóságfogalom közös általánosítása a korábbi deriváltfogalmaknak:

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény: $f'(x)$ egy szám (meredekség) vagy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris függvény vagy 1×1-es mátrix	Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ görbe: $f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_q'(t) \end{pmatrix}$ (érintő)vektor; q-dim. (oszlop)vektor ha tetszik, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ lin. fv

Differenciálhatóság

Ez a differenciálhatóságfogalom közös általánosítása a korábbi deriváltfogalmaknak:

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény: $f'(x)$ egy szám (meredekség) vagy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris függvény vagy 1×1-es mátrix	Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ görbe: $f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_q'(t) \end{pmatrix}$ (érintő)vektor; q-dim. (oszlop)vektor ha tetszik, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ lin. fv
Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény: $f'(a)$ egy $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ lineáris függvény vagy $\big(D_1 f(a) \ \dots \ D_p f(a)\big)$, p-dim. (gradiens)vektor vagy p-dim. sorvektor	

Differenciálhatóság

Ez a differenciálhatóságfogalom közös általánosítása a korábbi deriváltfogalmaknak:

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény: $f'(x)$ egy szám (meredekség) vagy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris függvény vagy 1×1-es mátrix	Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ görbe: $f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_q'(t) \end{pmatrix}$ (érintő)vektor; q-dim. (oszlop)vektor ha tetszik, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ lin. fv
Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény: $f'(a)$ egy $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ lineáris függvény vagy $\begin{pmatrix} D_1 f(a) & \dots & D_p f(a) \end{pmatrix}$, p-dim. (gradiens)vektor vagy p-dim. sorvektor	Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezés: $f'(a)$ egy $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris fv vagy $\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix}$ $q \times p$-es mátrix

Blokkmátrixok, parciális deriváltak

$$J\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = J\left(\begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_r \\ \hline g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{array}\right)\left(x_1,\ldots,x_p \;\middle|\; y_1,\ldots,y_q\right) =$$

Blokkmátrixok, parciális deriváltak

$$J\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = J\left(\begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_r \\ \hline g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{array}\right)\left(x_1,\ldots,x_p \,\middle|\, y_1,\ldots,y_q\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} D_{x_1}f_1 & \ldots & D_{x_p}f_1 & D_{y_1}f_1 & \ldots & D_{y_q}f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1}f_r & \ldots & D_{x_p}f_r & D_{y_1}f_r & \ldots & D_{y_q}f_r \\ \hline D_{x_1}g_1 & \ldots & D_{x_p}g_1 & D_{y_1}g_1 & \ldots & D_{y_q}g_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1}g_s & \ldots & D_{x_p}g_s & D_{y_1}g_s & \ldots & D_{y_q}g_s \end{array}\right)$$

Blokkmátrixok, parciális deriváltak

$$J\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = J\left(\begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_r \\ \hline g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{array}\right)\left(x_1,\ldots,x_p \,\middle|\, y_1,\ldots,y_q\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} D_{x_1}f_1 & \ldots & D_{x_p}f_1 & D_{y_1}f_1 & \ldots & D_{y_q}f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1}f_r & \ldots & D_{x_p}f_r & D_{y_1}f_r & \ldots & D_{y_q}f_r \\ \hline D_{x_1}g_1 & \ldots & D_{x_p}g_1 & D_{y_1}g_1 & \ldots & D_{y_q}g_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1}g_s & \ldots & D_{x_p}g_s & D_{y_1}g_s & \ldots & D_{y_q}g_s \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} D_x f & D_y f \\ \hline D_x g & D_y g \end{array}\right)$$

Differenciálási szabályok

Differenciálási szabályok

Trivi. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az a pontban és $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f$ is differenciálható a-ban, és

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a).$$

Trivi. Ha $f, g : H \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az a pontban, akkor $f + g$ is differenciálható a-ban, és

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Differenciálási szabályok

Trivi. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}^q$; $a \in \operatorname{int} H$. Ha $f : H \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az a pontban és $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f$ is differenciálható a-ban, és

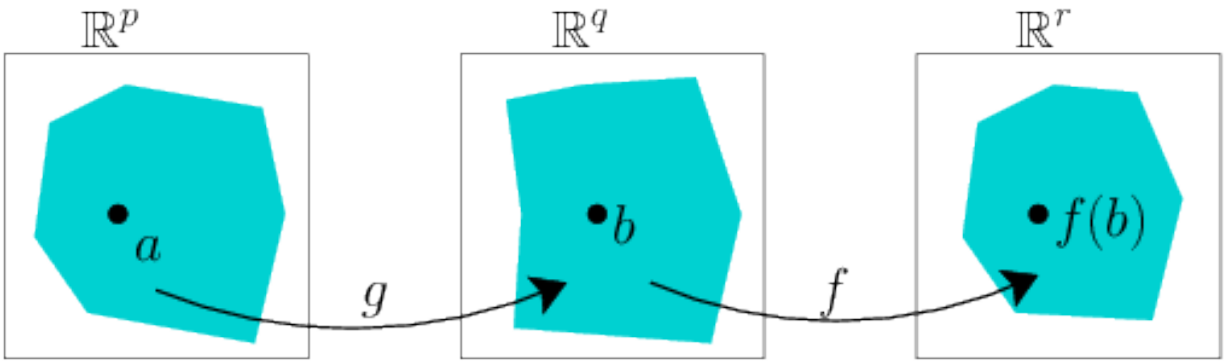
$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a).$$

Trivi. Ha $f, g : H \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az a pontban, akkor $f + g$ is differenciálható a-ban, és

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(Trivi az ε függvények folytonosságából.)

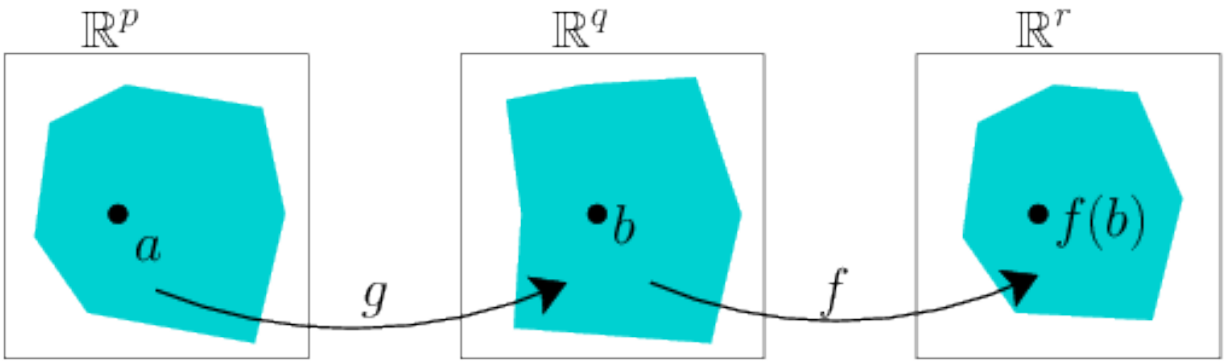
Differenciálási szabályok / láncszabály



Tétel (Láncszabály). Legyen a p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képező g függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban és $g(a) = b \in \mathbb{R}^q$. Továbbá legyen a q-változós, $\mathbb{R}^r$-be képező f függvény differenciálható a b pontban. Ekkor a p-változós, $\mathbb{R}^r$-be képező $f \circ g$ függvény is differenciálható az a pontban, és

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \circ g'(a)$$

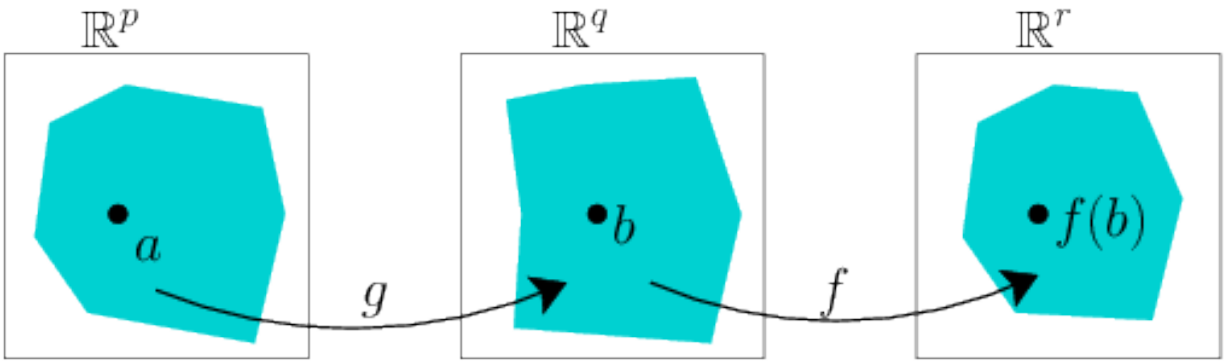
Differenciálási szabályok / láncszabály



Tétel (Láncszabály). Legyen a p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képező g függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban és $g(a) = b \in \mathbb{R}^q$. Továbbá legyen a q-változós, $\mathbb{R}^r$-be képező f függvény differenciálható a b pontban. Ekkor a p-változós, $\mathbb{R}^r$-be képező $f \circ g$ függvény is differenciálható az a pontban, és

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \circ g'(a) = f'(g(a)) \circ g'(a).$$

Differenciálási szabályok / láncszabály



Tétel (Láncszabály). Legyen a p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képező g függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban és $g(a) = b \in \mathbb{R}^q$. Továbbá legyen a q-változós, $\mathbb{R}^r$-be képező f függvény differenciálható a b pontban. Ekkor a p-változós, $\mathbb{R}^r$-be képező $f \circ g$ függvény is differenciálható az a pontban, és

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \circ g'(a) = f'(g(a)) \circ g'(a).$$

Avagy Jacobi-mátrixokkal

$$\underbrace{J(f \circ g)(a)}_{r \times p} = \underbrace{Jf(b)}_{r \times q} \cdot \underbrace{Jg(a)}_{q \times p} = Jf(g(a)) \cdot Jg(a).$$

Differenciálási szabályok / láncszabály

Biz. Legyen

$$A = g'(a), \quad g(x) = g(a) + A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|,$$
$$B = f'(b), \quad f(y) = f(b) + B(y-b) + \eta(y)|y-b|,$$

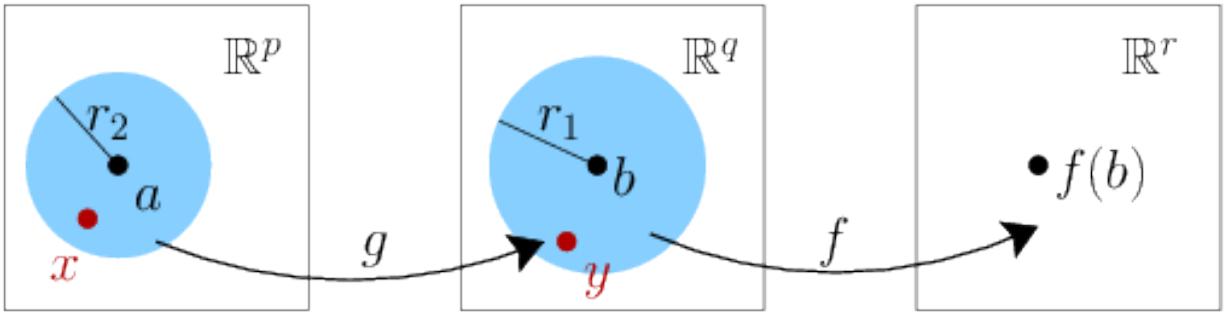
($\varepsilon(x)$ folyt. a-ban, $\varepsilon(a) = 0_q$; $\eta(y)$ folyt. b-ben, $\eta(b) = 0_r$.)

Differenciálási szabályok / láncszabály

Biz. Legyen

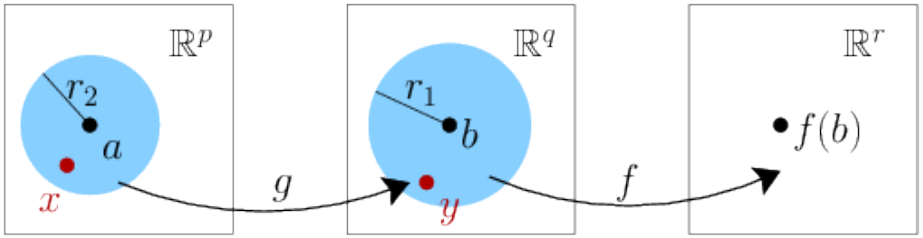
$$A = g'(a), \quad g(x) = g(a) + A(x-a) + \varepsilon(x)|x-a|,$$
$$B = f'(b), \quad f(y) = f(b) + B(y-b) + \eta(y)|y-b|,$$

($\varepsilon(x)$ folyt. a-ban, $\varepsilon(a) = 0_q$; $\eta(y)$ folyt. b-ben, $\eta(b) = 0_r$.)

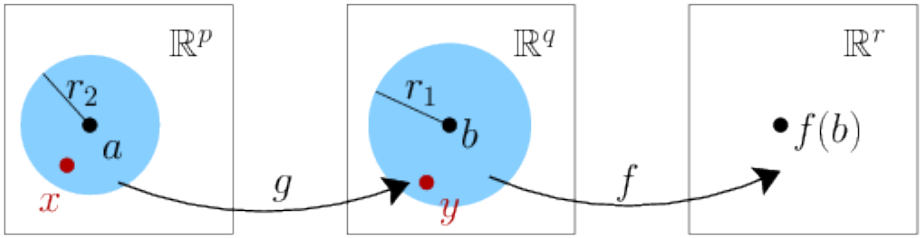


Az f értelmes valamilyen $B(b, r_1)$ gömbben.
A g differenciálható, ezért folytonos is a-ban, így egy elég kis $B(a, r_2)$ gömbben g értelmes és $g(x) \in B(b, r_1)$. Az r_2-t válasszuk olyan kicsinek, hogy $x \in B(a, r_2)$ esetén $|\varepsilon(x)| < 1$ legyen (ez jól fog jönni még).
Tehát a $B(a, r_2)$ gömbben $f \circ g$ értelmes (ez is kell a differenciálhatósághoz).

Differenciálási szabályok / láncszabály

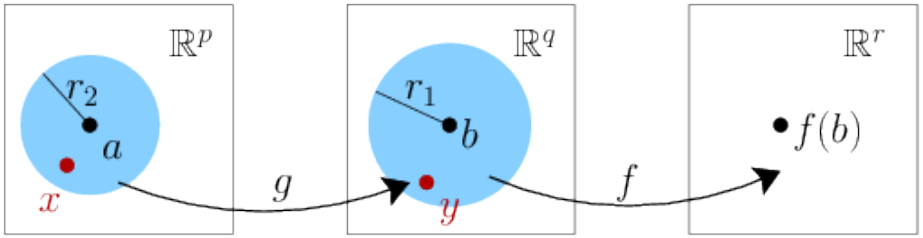


Differenciálási szabályok / láncszabály



A $B(a, r_2)$ gömbben

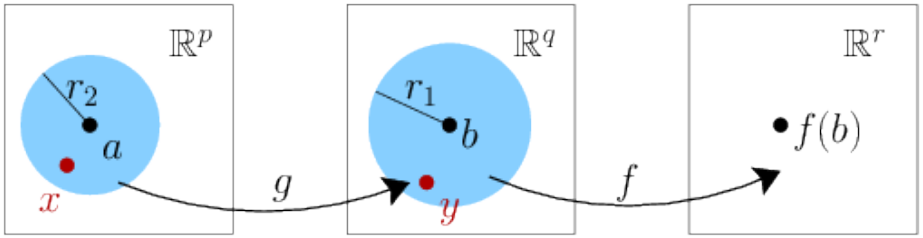
Differenciálási szabályok / láncszabály



A $B(a, r_2)$ gömbben

$$\left|g(x)-g(a)\right| = \left|A(x-a)+\varepsilon(x)|x-a|\right| \leq \left|A(x-a)\right| + \left|\varepsilon(x)\right|\cdot|x-a| \leq$$

Differenciálási szabályok / láncszabály



A $B(a, r_2)$ gömbben

$$\big|g(x)-g(a)\big| = \big|A(x-a)+\varepsilon(x)|x-a|\big| \leq \big|A(x-a)\big| + \big|\varepsilon(x)\big|\cdot|x-a| \leq$$

$$\leq \|A\| \cdot |x-a| \; + \; 1 \cdot |x-a| = \big(\|A\| + 1\big)|x-a|.$$

Differenciálási szabályok / láncszabály

Mostantól $y = g(x)$.

Differenciálási szabályok / láncszabály

Mostantól $y = g(x)$. A $B(a, r_2)$ gömbben

$$\left|f(g(x)) - f(g(a)) - BA(x - a)\right| =$$

Differenciálási szabályok / láncszabály

Mostantól $y = g(x)$. A $B(a, r_2)$ gömbben

$$\left|f(g(x)) - f(g(a)) - BA(x-a)\right| =$$
$$= \left|f(y) - f(b) - B(y-b) + B(y-b-A(x-a))\right| \leq$$

Differenciálási szabályok / láncszabály

Mostantól $y = g(x)$. A $B(a, r_2)$ gömbben

$$\left|f(g(x)) - f(g(a)) - BA(x-a)\right| =$$
$$= \left|f(y) - f(b) - B(y-b) + B(y-b-A(x-a))\right| \leq$$
$$\leq \left|f(y) - f(b) - B(y-b)\right| \; + \; \left|B(g(x) - g(a) - A(x-a))\right| \leq$$

Differenciálási szabályok / láncszabály

Mostantól $y = g(x)$. A $B(a, r_2)$ gömbben

$$\big|f(g(x)) - f(g(a)) - BA(x-a)\big| =$$
$$= \big|f(y) - f(b) - B(y-b) + B(y-b-A(x-a))\big| \leq$$
$$\leq \big|f(y) - f(b) - B(y-b)\big| \; + \; \big|B(g(x) - g(a) - A(x-a))\big| \leq$$
$$\leq \big|\eta(y)\big| \cdot |y-b| \; + \; \|B\| \cdot \big|g(x) - g(a) - A(x-a)\big| \leq$$

Differenciálási szabályok / láncszabály

Mostantól $y = g(x)$. A $B(a, r_2)$ gömbben

$$\big|f(g(x)) - f(g(a)) - BA(x-a)\big| =$$
$$= \big|f(y) - f(b) - B(y-b) + B(y-b-A(x-a))\big| \leq$$
$$\leq \big|f(y) - f(b) - B(y-b)\big| \; + \; \big|B(g(x) - g(a) - A(x-a))\big| \leq$$
$$\leq \big|\eta(y)\big| \cdot |y-b| \; + \; \|B\| \cdot \big|g(x) - g(a) - A(x-a)\big| \leq$$
$$\leq \big|\eta(y)\big| \cdot \big(\|A\| + 1\big)|x-a| \; + \; \|B\| \cdot \big|\varepsilon(x)\big| \cdot |x-a| =$$

Differenciálási szabályok / láncszabály

Mostantól $y = g(x)$. A $B(a, r_2)$ gömbben

$$\begin{aligned}
&\big|f(g(x)) - f(g(a)) - BA(x-a)\big| = \\
&= \big|f(y) - f(b) - B(y-b) + B(y-b-A(x-a))\big| \le \\
&\le \big|f(y) - f(b) - B(y-b)\big| \;+\; \big|B(g(x) - g(a) - A(x-a))\big| \le \\
&\le \big|\eta(y)\big| \cdot |y-b| \;+\; \|B\| \cdot \big|g(x) - g(a) - A(x-a)\big| \le \\
&\le \big|\eta(y)\big| \cdot \big(\|A\| + 1\big)|x-a| \;+\; \|B\| \cdot \big|\varepsilon(x)\big| \cdot |x-a| = \\
&= \Big(\big|\eta(g(x))\big| \cdot \big(\|A\| + 1\big) \;+\; \|B\| \cdot \big|\varepsilon(x)\big|\Big) \cdot |x-a|.
\end{aligned}$$

Tehát

$$\left|\frac{\big|f(g(x)) - f(g(a)) - BA(x-a)\big|}{|x-a|}\right| \le \big|\eta(g(x))\big| \cdot \big(\|A\| + 1\big) + \|B\| \cdot \big|\varepsilon(x)\big|.$$

Rendőr-elv miatt $\lim\limits_{x \to a} \left|\dfrac{\big|f(g(x)) - f(g(a)) - BA(x-a)\big|}{|x-a|}\right| = 0$;

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ differenciálható a-ban, és

$$(f \circ g)'(a) = BA = f'(b) \cdot g'(a).$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Köv (összetett függvény differenciálási szabálya; láncszabály). Ha $g_1, \dots, g_q$ p-változós, számértékű függvények, differenciálhatók az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, $b_j = g_j(a)$, továbbá a q-változós, számértékű f függvény differenciálható a $(b_1, \dots, b_q)$ pontban, akkor az $F(x) = f\big(g_1(x), \dots, g_q(x)\big)$ függvény is differenciálható az a pontban, és a parciális deriváltjait így írhatjuk fel:

$$D_i F(a) = \sum_{j=1}^{q} D_j f(b) \cdot D_i g_j(a) \quad \text{avagy} \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial F}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

Biz. Az előző tétel speciális esete $r = 1$-re. Jacobi-mátrixokkal

$$\operatorname{grad} F(a) = \begin{pmatrix} D_1 f(b) & \dots & D_q f(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 g_1(a) & \dots & D_p g_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 g_q(a) & \dots & D_p g_q(a) \end{pmatrix}$$

Ebből kell leolvasni az i-edik elemet, ami a $\operatorname{grad} f(b)$ vektor és a $Jg(a)$ Jacobi-mátrix i-edik oszlopának szorzata.

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Legyen $g(t)$ és $h(t)$ két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a $t = a$ helyen, $g(a) = b$, $h(a) = c$, továbbá legyen $f(x, y) = x \cdot y$. A láncszabály szerint az $f(g(t), h(t)) = g(t) \cdot h(t)$ is differenciálható az a helyen, és

$$(g \cdot h)'(a)$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Legyen $g(t)$ és $h(t)$ két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a $t = a$ helyen, $g(a) = b$, $h(a) = c$, továbbá legyen $f(x, y) = x \cdot y$. A láncszabály szerint az $f(g(t), h(t)) = g(t) \cdot h(t)$ is differenciálható az a helyen, és

$$(g \cdot h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Legyen $g(t)$ és $h(t)$ két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a $t = a$ helyen, $g(a) = b$, $h(a) = c$, továbbá legyen $f(x, y) = x \cdot y$. A láncszabály szerint az $f(g(t), h(t)) = g(t) \cdot h(t)$ is differenciálható az a helyen, és

$$(g \cdot h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= c \cdot g'(a) + b \cdot h'(a)$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Legyen $g(t)$ és $h(t)$ két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a $t = a$ helyen, $g(a) = b$, $h(a) = c$, továbbá legyen $f(x, y) = x \cdot y$. A láncszabály szerint az $f(g(t), h(t)) = g(t) \cdot h(t)$ is differenciálható az a helyen, és

$$(g \cdot h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= c \cdot g'(a) + b \cdot h'(a) = h(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot h'(a).$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Legyen $g(t)$ és $h(t)$ két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a $t = a$ helyen, $g(a) = b$, $h(a) = c$, továbbá legyen $f(x, y) = x \cdot y$. A láncszabály szerint az $f(g(t), h(t)) = g(t) \cdot h(t)$ is differenciálható az a helyen, és

$$(g \cdot h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= c \cdot g'(a) + b \cdot h'(a) = h(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot h'(a).$$

Ugyanez hányadossal: most $f(x, y) = x/y$ és $h(a) = c \neq 0$.

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Legyen $g(t)$ és $h(t)$ két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a $t = a$ helyen, $g(a) = b$, $h(a) = c$, továbbá legyen $f(x, y) = x \cdot y$. A láncszabály szerint az $f(g(t), h(t)) = g(t) \cdot h(t)$ is differenciálható az a helyen, és

$$(g \cdot h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= c \cdot g'(a) + b \cdot h'(a) = h(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot h'(a).$$

Ugyanez hányadossal: most $f(x, y) = x/y$ és $h(a) = c \neq 0$.

$$(g/h)'(a)$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Legyen $g(t)$ és $h(t)$ két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a $t = a$ helyen, $g(a) = b$, $h(a) = c$, továbbá legyen $f(x, y) = x \cdot y$. A láncszabály szerint az $f(g(t), h(t)) = g(t) \cdot h(t)$ is differenciálható az a helyen, és

$$(g \cdot h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= c \cdot g'(a) + b \cdot h'(a) = h(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot h'(a).$$

Ugyanez hányadossal: most $f(x, y) = x/y$ és $h(a) = c \neq 0$.

$$(g/h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Legyen $g(t)$ és $h(t)$ két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a $t = a$ helyen, $g(a) = b$, $h(a) = c$, továbbá legyen $f(x, y) = x \cdot y$. A láncszabály szerint az $f(g(t), h(t)) = g(t) \cdot h(t)$ is differenciálható az a helyen, és

$$(g \cdot h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= c \cdot g'(a) + b \cdot h'(a) = h(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot h'(a).$$

Ugyanez hányadossal: most $f(x, y) = x/y$ és $h(a) = c \neq 0$.

$$(g/h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= \frac{1}{c} \cdot g'(a) + \frac{-b}{c^2} \cdot h'(a)$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Legyen $g(t)$ és $h(t)$ két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a $t = a$ helyen, $g(a) = b$, $h(a) = c$, továbbá legyen $f(x, y) = x \cdot y$. A láncszabály szerint az $f(g(t), h(t)) = g(t) \cdot h(t)$ is differenciálható az a helyen, és

$$(g \cdot h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= c \cdot g'(a) + b \cdot h'(a) = h(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot h'(a).$$

Ugyanez hányadossal: most $f(x, y) = x/y$ és $h(a) = c \neq 0$.

$$(g/h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= \frac{1}{c} \cdot g'(a) + \frac{-b}{c^2} \cdot h'(a) = \frac{1}{h(a)} \cdot g'(a) - \frac{g(a)}{h(a)^2} \cdot h'(a).$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Legyen $g(t)$ és $h(t)$ két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a $t = a$ helyen, $g(a) = b$, $h(a) = c$, továbbá legyen $f(x, y) = x \cdot y$. A láncszabály szerint az $f(g(t), h(t)) = g(t) \cdot h(t)$ is differenciálható az a helyen, és

$$(g \cdot h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= c \cdot g'(a) + b \cdot h'(a) = h(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot h'(a).$$

Ugyanez hányadossal: most $f(x, y) = x/y$ és $h(a) = c \neq 0$.

$$(g/h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= \frac{1}{c} \cdot g'(a) + \frac{-b}{c^2} \cdot h'(a) = \frac{1}{h(a)} \cdot g'(a) - \frac{g(a)}{h(a)^2} \cdot h'(a).$$

Házi feladat kipróbálni ugyanezt n-tényezős szorzattal és hatványozással is.

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Legyen $g(t)$ és $h(t)$ két egyváltozós, számértékű függvény; mindkettő differenciálható a $t = a$ helyen, $g(a) = b$, $h(a) = c$, továbbá legyen $f(x, y) = x \cdot y$. A láncszabály szerint az $f(g(t), h(t)) = g(t) \cdot h(t)$ is differenciálható az a helyen, és

$$(g \cdot h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= c \cdot g'(a) + b \cdot h'(a) = h(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot h'(a).$$

Ugyanez hányadossal: most $f(x, y) = x/y$ és $h(a) = c \neq 0$.

$$(g/h)'(a) = D_1 f(b, c) \cdot g'(a) + D_2 f(b, c) \cdot h'(t) =$$

$$= \frac{1}{c} \cdot g'(a) + \frac{-b}{c^2} \cdot h'(a) = \frac{1}{h(a)} \cdot g'(a) - \frac{g(a)}{h(a)^2} \cdot h'(a).$$

Házi feladat kipróbálni ugyanezt n-tényezős szorzattal és hatványozással is.

Köv. Differenciálható függvények szorzata és hányadosa is differenciálható (mindenhol, ahol nem kell nullával osztani.)

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez. $\left(|g|^2\right)' = ?$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez. $\left(|g|^2\right)' = ?$

$$f(y) = |y|^2 = y_1^2 + \ldots + y_q^2$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez. $\left(|g|^2\right)' = ?$

$$f(y) = |y|^2 = y_1^2 + \ldots + y_q^2$$

$$f'(y) = 2y^t$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez. $\left(|g|^2\right)' = ?$

$$f(y) = |y|^2 = y_1^2 + \ldots + y_q^2$$

$$f'(y) = 2y^t$$

$$\left(|g|^2\right)' = 2g^t \cdot g'.$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez, $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^r)$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez, $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^r)$

$$A'(y) = A$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez, $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^r)$

$$A'(y) = A \qquad \text{(v.ö. } (e^x)' = e^x \quad \text{:-o)}$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez, $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^r)$

$$A'(y) = A \qquad \text{(v.ö. } (e^x)' = e^x \quad \text{:-o)}$$

$$(Ag(x))' = (A(g(x)))' = A \circ g'(x) = Ag'(x).$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez, $v \in \mathbb{R}^q$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez, $v \in \mathbb{R}^q$

$$\langle v, y \rangle' = v^t$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. g p-változós, $\mathbb{R}^q$-ba képez, $v \in \mathbb{R}^q$

$$\langle v, y \rangle' = v^t$$

$$\langle v, g(x) \rangle' = v^t g'(x).$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Most legyen g és h két, $\mathbb{R}^q$-ba képező függvény, ami differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, és legyen $f(x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_q) = x_1 y_1 + \cdots + x_q y_q$ az $\mathbb{R}^q$-beli skaláris szorzás.

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Most legyen g és h két, $\mathbb{R}^q$-ba képező függvény, ami differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, és legyen $f(x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_q) = x_1 y_1 + \cdots + x_q y_q$ az $\mathbb{R}^q$-beli skaláris szorzás.

$$\operatorname{grad} f = (y_1, \ldots, y_q,\ x_1, \ldots, x_q)$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Most legyen g és h két, $\mathbb{R}^q$-ba képező függvény, ami differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, és legyen $f(x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_q) = x_1 y_1 + \cdots + x_q y_q$ az $\mathbb{R}^q$-beli skaláris szorzás.

$$\operatorname{grad} f = (y_1, \ldots, y_q,\ x_1, \ldots, x_q) = (y^t, x^t)$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Most legyen g és h két, $\mathbb{R}^q$-ba képező függvény, ami differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, és legyen $f(x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_q) = x_1 y_1 + \cdots + x_q y_q$ az $\mathbb{R}^q$-beli skaláris szorzás.

$$\operatorname{grad} f = (y_1, \ldots, y_q,\ x_1, \ldots, x_q) = (y^t, x^t)$$

$$\langle g, h \rangle' = h^t g' + g^t h'$$

Differenciálási szabályok / összetett függvény

Példa. Most legyen g és h két, $\mathbb{R}^q$-ba képező függvény, ami differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, és legyen $f(x_1, \ldots, x_q, y_1, \ldots, y_q) = x_1 y_1 + \cdots + x_q y_q$ az $\mathbb{R}^q$-beli skaláris szorzás.

$$\operatorname{grad} f = (y_1, \ldots, y_q,\ x_1, \ldots, x_q) = (y^t, x^t)$$

$$\langle g, h \rangle' = h^t g' + g^t h'$$

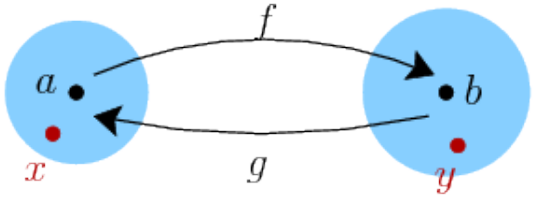
(Ha g egyváltozós, akkor ... $= \langle \operatorname{grad} g, h \rangle + \langle h, \operatorname{grad} g \rangle$.

Differenciálási szabályok / inverz függvény

Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya).

Differenciálási szabályok / inverz függvény

Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya).
Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.

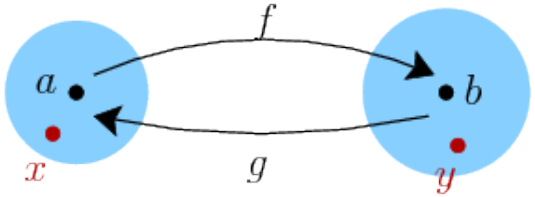


$$y - b \approx A(x - a)$$
$$x - a \approx A^{-1}(y - b)$$

Tegyük fel, hogy van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$. Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = A^{-1}$ avagy $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Differenciálási szabályok / inverz függvény

Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya).
Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.



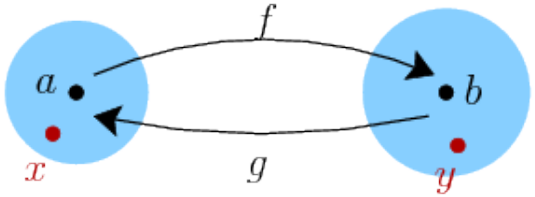
$$y - b \approx A(x - a)$$
$$x - a \approx A^{-1}(y - b)$$

Tegyük fel, hogy van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$. Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = A^{-1}$ avagy $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Biz. Végig $y \in B(b, r)$ és $x = g(y)$ lesz.

Differenciálási szabályok / inverz függvény

Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya).
Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.



$$y - b \approx A(x - a)$$
$$x - a \approx A^{-1}(y - b)$$

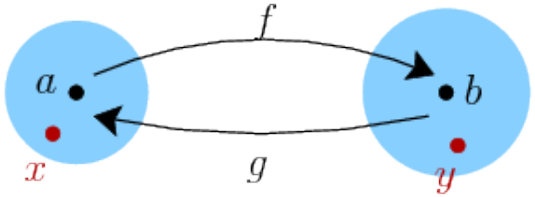
Tegyük fel, hogy van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$. Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = A^{-1}$ avagy $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Biz. Végig $y \in B(b, r)$ és $x = g(y)$ lesz.

$$y - b = f(x) - f(a)$$

Differenciálási szabályok / inverz függvény

Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya).
Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.



$$y - b \approx A(x - a)$$
$$x - a \approx A^{-1}(y - b)$$

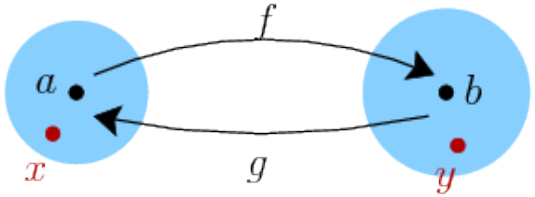
Tegyük fel, hogy van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$. Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = A^{-1}$ avagy $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Biz. Végig $y \in B(b, r)$ és $x = g(y)$ lesz.

$$y - b = f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|$$

Differenciálási szabályok / inverz függvény

Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya).
Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.



$$y - b \approx A(x - a)$$
$$x - a \approx A^{-1}(y - b)$$

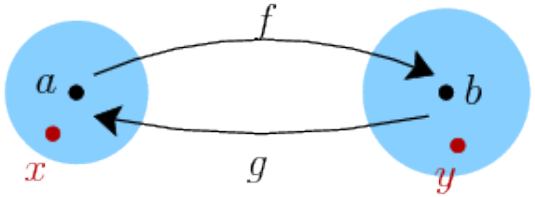
Tegyük fel, hogy van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$. Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = A^{-1}$ avagy $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Biz. Végig $y \in B(b, r)$ és $x = g(y)$ lesz.

$$y - b = f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|$$
$$A^{-1}(y - b) = (x - a) + A^{-1}\varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

Differenciálási szabályok / inverz függvény

Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya).
Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.



$$y - b \approx A(x - a)$$
$$x - a \approx A^{-1}(y - b)$$

Tegyük fel, hogy van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$. Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = A^{-1}$ avagy $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

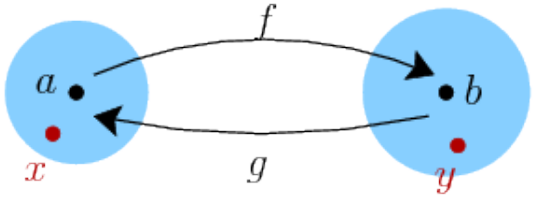
Biz. Végig $y \in B(b, r)$ és $x = g(y)$ lesz.

$$y - b = f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|$$
$$A^{-1}(y - b) = (x - a) + A^{-1}\varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

Az $\varepsilon(x) = \varepsilon(g)(y))$ folytonos b-ben; ha $|y - b|$ elég kicsi: $\|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| < \frac{1}{2}$

Differenciálási szabályok / inverz függvény

Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya).
Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.



$$y - b \approx A(x - a)$$
$$x - a \approx A^{-1}(y - b)$$

Tegyük fel, hogy van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$. Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = A^{-1}$ avagy $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Biz. Végig $y \in B(b, r)$ és $x = g(y)$ lesz.

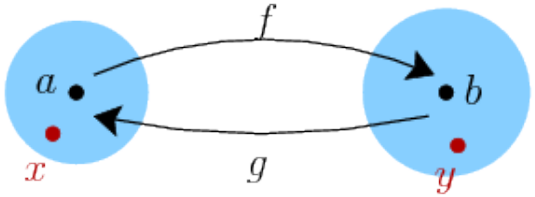
$$y - b = f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|$$
$$A^{-1}(y - b) = (x - a) + A^{-1}\varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

Az $\varepsilon(x) = \varepsilon(g)(y))$ folytonos b-ben; ha $|y - b|$ elég kicsi: $\|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| < \frac{1}{2}$

$$\left|A^{-1}(y-b)\right| \geq |x-a| - \left|A^{-1}\varepsilon(x)\right| \cdot |x-a| \geq \left(1 - \|A^{-1}\| \cdot |\varepsilon(x)|\right)|x-a| \geq \tfrac{1}{2}|x-a|$$

Differenciálási szabályok / inverz függvény

Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya).
Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.



$$y - b \approx A(x - a)$$
$$x - a \approx A^{-1}(y - b)$$

Tegyük fel, hogy van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$. Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = A^{-1}$ avagy $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Biz. Végig $y \in B(b, r)$ és $x = g(y)$ lesz.

$$y - b = f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|$$
$$A^{-1}(y - b) = (x - a) + A^{-1}\varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

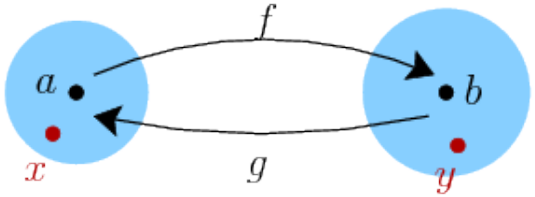
Az $\varepsilon(x) = \varepsilon(g)(y))$ folytonos b-ben; ha $|y - b|$ elég kicsi: $\|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| < \frac{1}{2}$

$$\left|A^{-1}(y-b)\right| \geq |x-a| - \left|A^{-1}\varepsilon(x)\right| \cdot |x-a| \geq \left(1 - \|A^{-1}\| \cdot |\varepsilon(x)|\right)|x-a| \geq \tfrac{1}{2}|x-a|$$

$$\left|g(y) - g(b) - A^{-1}(y - b)\right| = \left|x - a - A^{-1}(y - b)\right| = \left|A^{-1}\varepsilon(x)\right| \cdot |x - a| \leq$$

Differenciálási szabályok / inverz függvény

Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya).
Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.



$$y - b \approx A(x - a)$$
$$x - a \approx A^{-1}(y - b)$$

Tegyük fel, hogy van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$. Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = A^{-1}$ avagy $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Biz. Végig $y \in B(b, r)$ és $x = g(y)$ lesz.

$$y - b = f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|$$
$$A^{-1}(y - b) = (x - a) + A^{-1}\varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

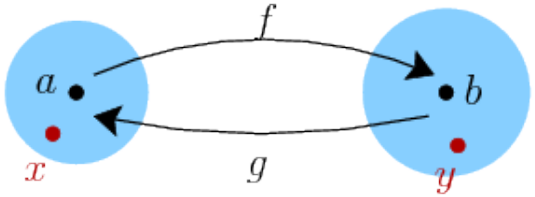
Az $\varepsilon(x) = \varepsilon(g)(y))$ folytonos b-ben; ha $|y - b|$ elég kicsi: $\|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| < \frac{1}{2}$

$$\left|A^{-1}(y-b)\right| \geq |x-a| - \left|A^{-1}\varepsilon(x)\right| \cdot |x-a| \geq \left(1 - \|A^{-1}\| \cdot |\varepsilon(x)|\right)|x-a| \geq \tfrac{1}{2}|x-a|$$

$$\left|g(y) - g(b) - A^{-1}(y - b)\right| = \left|x - a - A^{-1}(y - b)\right| = \left|A^{-1}\varepsilon(x)\right| \cdot |x - a| \leq$$
$$\leq \|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| \cdot 2\left|A^{-1}(y - b)\right|$$

Differenciálási szabályok / inverz függvény

Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya).
Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.



$$y - b \approx A(x - a)$$
$$x - a \approx A^{-1}(y - b)$$

Tegyük fel, hogy van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$. Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = A^{-1}$ avagy $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Biz. Végig $y \in B(b, r)$ és $x = g(y)$ lesz.

$$y - b = f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|$$
$$A^{-1}(y - b) = (x - a) + A^{-1}\varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

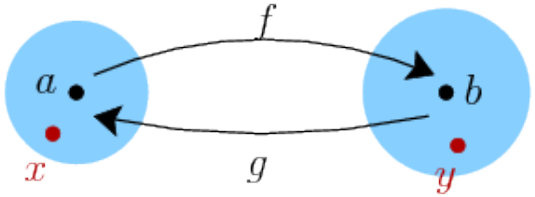
Az $\varepsilon(x) = \varepsilon(g)(y))$ folytonos b-ben; ha $|y - b|$ elég kicsi: $\|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| < \frac{1}{2}$

$$\left|A^{-1}(y-b)\right| \geq |x-a| - \left|A^{-1}\varepsilon(x)\right| \cdot |x-a| \geq \left(1 - \|A^{-1}\| \cdot |\varepsilon(x)|\right)|x-a| \geq \tfrac{1}{2}|x-a|$$

$$\left|g(y) - g(b) - A^{-1}(y - b)\right| = \left|x - a - A^{-1}(y - b)\right| = \left|A^{-1}\varepsilon(x)\right| \cdot |x - a| \leq$$
$$\leq \|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| \cdot 2\left|A^{-1}(y - b)\right| \leq \|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| \cdot 2\|A^{-1}\| \cdot |y - b|.$$

Differenciálási szabályok / inverz függvény

Tétel (inverz függvény differenciálási szabálya).
Legyen f p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.



$$y - b \approx A(x - a)$$
$$x - a \approx A^{-1}(y - b)$$

Tegyük fel, hogy van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$. Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = A^{-1}$ avagy $g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

Biz. Végig $y \in B(b, r)$ és $x = g(y)$ lesz.

$$y - b = f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|$$
$$A^{-1}(y - b) = (x - a) + A^{-1}\varepsilon(x) \cdot |x - a|.$$

Az $\varepsilon(x) = \varepsilon(g)(y))$ folytonos b-ben; ha $|y - b|$ elég kicsi: $\|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| < \frac{1}{2}$

$$\left|A^{-1}(y-b)\right| \geq |x-a| - \left|A^{-1}\varepsilon(x)\right| \cdot |x-a| \geq \left(1 - \|A^{-1}\| \cdot |\varepsilon(x)|\right)|x-a| \geq \tfrac{1}{2}|x-a|$$

$$\left|g(y) - g(b) - A^{-1}(y - b)\right| = \left|x - a - A^{-1}(y - b)\right| = \left|A^{-1}\varepsilon(x)\right| \cdot |x - a| \leq$$
$$\leq \|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| \cdot 2\left|A^{-1}(y - b)\right| \leq \|A^{-1}\| \cdot \left|\varepsilon(x)\right| \cdot 2\|A^{-1}\| \cdot |y - b|.$$

$$\frac{\left|g(y) - g(b) - A^{-1}(y - b)\right|}{|y - b|} \leq 2\|A^{-1}\|^2 \cdot \left|\varepsilon(g(y))\right| \to 0.$$

Differenciálási szabályok / inverz függvény

”f egy p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.
Ha van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$...”

Differenciálási szabályok / inverz függvény

"f egy p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.
Ha van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$..."

Kérdés. Hogyan lehet egyszerűen eldönteni, vagy tudunk-e rá valami egyszerű elégséges feltételt, hogy van-e ilyen lokális inverz g függvény?

Differenciálási szabályok / inverz függvény

”f egy p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.
Ha van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$...”

Kérdés. Hogyan lehet egyszerűen eldönteni, vagy tudunk-e rá valami egyszerű elégséges feltételt, hogy van-e ilyen lokális inverz g függvény?

Erről is lesz szó a következő előadáson, vagyis holnap.

Differenciálási szabályok / inverz függvény

”f egy p-változós, $\mathbb{R}^p$-e képező leképezés, amely differenciálható az a pontban, $f(a) = b \in \mathbb{R}^p$ és $f'(a) = A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ invertálható.
Ha van egy szintén p-változós, $\mathbb{R}^p$-be képező g függvény, amely folytonos b-ben, és b egy környezetében $f(g(y)) = y$...”

Kérdés. Hogyan lehet egyszerűen eldönteni, vagy tudunk-e rá valami egyszerű elégséges feltételt, hogy van-e ilyen lokális inverz g függvény?

Erről is lesz szó a következő előadáson, vagyis holnap.

folyt. köv.