An3 jegyzetek

(Utolsó módosítás: 2018. december 22., 14:50)

Hivatkozások

[BStv] Biot-Savart törvény, Wikipedia,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Biot-Savart-t%C3%B6rv%C3%A9ny

[Atv] Ampère-törvény, Wikipedia,
https://hu.wikipedia.org/wiki/Maxwell-egyenletek

[LN] Linking Number, Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Linking_number

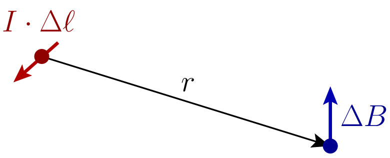
5. Mágneses örvényerősség és összehurkolódási szám

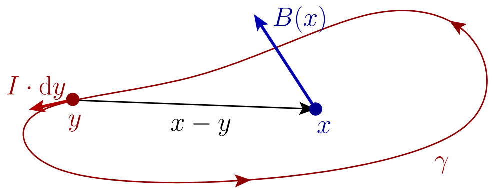
Az elektrodinamika egy olyan tudományterület, ahol a fizika összetalálkozik a topológiával.

5.1. tétel (Biot-Savart törvény [BStv]). *Ha egy rövid, $\Delta\ell$ hosszú vezető darabban I áram fut, akkor r vektorral arrébb ez az áramdarab*

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta\ell \times r}{|r|^3}$$

mágneses indukciót hoz létre.



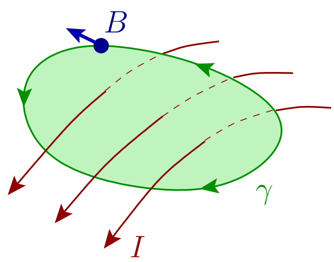


Ha a γ görbe mentén I áram folyik, akkor az áram által létrehozott mágneses indukció az x pontban

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{y \in \gamma} \frac{I\ \mathrm{d}y \times (x-y)}{|x-y|^3}.$$

5.2. tétel (Ampère- (gerjesztési) törvény; Maxwell IV. egyenlet [Atv]). *Ha a γ zárt görbe által határolt felületen I stacionárius áram*[1] *folyik keresztül, akkor a γ görbe mentén a mágneses örvényerősség*

$$\int_{y \in \gamma} \langle B,\ \mathrm{d}y \rangle = \mu_0 I.$$



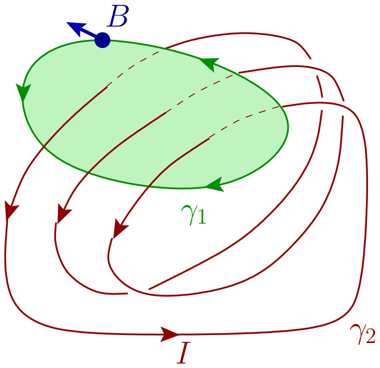
[1] A töltés nem gyűlik össze; tipikusan ez zárt áramkört jelent, kondenzátorok nélkül. Lásd a IV. Maxwell-egyenlet kiegészítését.

Képzeljünk el egy γ_1 zárt görbét, amely egy felületnek a pereme, és egy másik, γ_2 zárt görbét, ami N-szer átdöfi ezt a felületet. Ha γ_2 mentén I áram folyik, akkor a γ_1 mentén kétféleképpen is kiszámíthatjuk a mágneses örvényerősséget:

$$\mu_0 \cdot NI = \int_{x\in\gamma_1} \langle B,\ \mathrm{d}x\rangle = \int_{x\in\gamma_1} \left\langle \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{y\in\gamma_2} \frac{I\ \mathrm{d}y \times (x-y)}{|x-y|^3},\ \mathrm{d}x \right\rangle = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{x\in\gamma_1} \int_{y\in\gamma_2} \frac{\langle\ \mathrm{d}x \times\ \mathrm{d}y, x-y\rangle}{|x-y|^3}.$$

A $\mu_0 I$-vel osztva,

$$N = \frac{1}{4\pi} \int_{x\in\gamma_1} \int_{y\in\gamma_2} \frac{\langle\ \mathrm{d}x \times\ \mathrm{d}y, x-y\rangle}{|x-y|^3}.$$



Ennek a kettős vonalintegrálnak a neve (Gauss féle) Linking Number (talán összehurkolódási szám?) [LN]. Ha γ_1 és γ_2 két diszjunkt, rektifikálható görbe, akkor a kettős vonalintegrál értelmes, és az értéke egész szám (ezért kell 4π-vel osztani, ami az egységgömb felszíne). Akár ebből, akár közvetlenül ellenőrizhető, hogy homotóp görbepár párokra az összehurkolódási szám ugyanaz. Ennek sok topológiai alkalmazása van; pl. annak bizonyítása, hogy az egymáson átfűzött karikákat nem lehet szétválasztani.