An4 jegyzetek

(Utolsó módosítás: 2018. február 20., 12:15)

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.

1. Integráltételek síkban

Síkvektorok keresztszorzata, irányított szöge. Egyszerű zárt görbék, Jordan-görbetétel (bizonyítás nélkül). Egyszerű zárt görbe irányítása. Green-tétel (bizonyítás normáltartományra, és a bizonyítás vázlata az általános esetben). Külső normális. Newton-Leibniz formula síkban. Mese a kertünkben felörő és örvénylő talajvíztól. Forrás- és örvényerősség és -sűrűség, divergencia, rotáció. Függetlenség a koordináta-tengelyek irányától. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Stokes-tétel. [LTS2, 200–210. o.]

1.1. definíció. *A $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ síkvektorok "keresztszorzata"*

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

irányított szöge az a $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ szög, amelyre

$$|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle, \quad |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\varphi = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

1.2. definíció. *A $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ görbe "egyszerű, zárt", ha folytonos, $\gamma(a) = \gamma(b)$, és a két végpont kivételével injektív (pl. az $[a,b)$ intervallumra megszorítva injektív.)*

1.3. definíció. *Ha $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű, zárt görbe, és a $c \in \mathbb{R}^2$ pont nincs rajta a görbén, akkor $n(\gamma, c) \in \mathbb{Z}$ jelenti azt, hogy a γ előjelesen hányszor "kerüli meg" a c pontot. Neve: a görbe c-re vonatkozó indexe. A görbeindexet sokféle paraméteres vonalintegrállal is felírhatjuk, például*

$$n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{x} \in \gamma} \mathrm{d}\big(\mathit{szög}(\mathbf{x} - \mathbf{c})\big) = \frac{1}{2\pi} \int_{(x,y)\in\gamma} \frac{(x - c_1)\,\mathrm{d}x - (y - c_2)\,\mathrm{d}y}{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}$$

vagy komplex vonalintegrállal

$$n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z - c}.$$

A görbeindex mindig egész szám.

1.4. tétel (Jordan-féle görbetétel)**.** *Ha $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű, zárt görbe, akkor az $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma\big([a,b]\big)$ nyílt halmaz két összefüggő komponensből áll, az egyik komponens korlátos (a görbe "belseje"), a másik komponens nem korlátos (a görbe "külseje"), és mindkét komponens határa a γ.*

A görbe külső pontokra vonatkozó indexe 0, a belső pontokra vonatkozó index vagy mindenhol $+1$, vagy mindenhol -1. Az első esetben a görbét "pozitív irányításúnak", a második esetben "negatív irányításúnak" nevezzük.

(Erdős Pálnak az a mondása, hogy valaki "a Jordan-tételt tanulmányozza", azt jelentette: az illető börtönben van.)

1.5. definíció. *$K \subset \mathbb{R}^2$ "Jordan-tartomány", ha egy egyszerű, zárt, folytonos görbe határolja.*

A továbbiakban a határgörbét, pozitív irányítással, ∂K fogja jelölni.

1.6. definíció. *Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt. A $G \to \mathbb{R}$ függvényeket "skalármezőnek", a $G \to \mathbb{R}^p$ függvényeket "vektormezőnek" fogjuk hívni. A függvényeknél megszokott formulákkalbBeszélhetünk a mezők simaságáról (pl. 8-szor folytonosan differenciálható vektormező).*

1.7. tétel (Green)**.** *Legyen K Jordan-tartomány, amelynek a határa rektifikálható, legyen $G \supset \operatorname{cl} K$ nyílt, és $f : G \to \mathbb{R}$ folytonos.*

(a) Ha $\frac{\partial f}{\partial x}$ létezik és folytonos $\operatorname{cl} K$-n, akkor

$$\int_{\partial K} f \, \mathrm{d}y = \int_K \frac{\partial f}{\partial x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

(b) Ha $\frac{\partial f}{\partial y}$ létezik és folytonos $\operatorname{cl} K$-n, akkor

$$\int_{\partial K} f \, \mathrm{d}x = -\int_K \frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Bizonyítás. (b1). Ha K normáltartomány: a bizonyítás lényege, hogy K minden függőleges szekcióján alkalmazzuk a Newton-Leibniz formulát.

A ∂K négy részre vágható: a felső és az alsó határoló görbe grafikonja γ_1 és γ_3, és két függőleges szakasz γ_2 és γ_4. A felső függvénygrafikonon jobbról balra kell végigmennünk.

A két függvény grafikon legyen $(x, \varphi(x))$ és $(x, \psi(x))$, a közös értelmezési tartomány az $[a, b]$ intervallum.

A függőleges szakaszokon az x szerinti vonalintegrál 0.

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} \Big(f(x, \psi(x)) - f(x, \varphi(x)) \Big) \, \mathrm{d}x =$$
$$= -\int_{\gamma_1} f \, \mathrm{d}x - \int_{\gamma_3} f \, \mathrm{d}x = -\int_{\partial K} f \, \mathrm{d}x.$$

(a1) Hasonlóan, az x és y felcserélésével. (Ez a tükrözés megfordítja a határ irányítását, ezért azt meg kell fordítanunk; itt jön be még egy negatív előjel.)

Általában:

- A fentiek bizonyítanak például konvex sokszögekre.
- Átlókkal vagy akár párhuzamos szakaszokkal szétvágva-összeragasztva megkapjuk az állítást tetszőleges zárt töröttvonalra.
- Az általános esetben a határgörbét belülről közelítjük töröttvonalakkal, majd határátmenet.

1.8. következmény (Jordan-tartomány területe)**.**

$$t(K) = \int_{\partial K} x \, \mathrm{d}y = -\int_{\partial K} y \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{\partial K} \mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Bizonyítás. Green-tétel az $f(x, y) = x$, illetve $f(x, y) = -y$ függvényekre vagy a kettő összegére.

1.9. következmény. *Egyszerű zárt görbén, aminek a belsejében is rotációmentes egy vektormező, a vonalintegrál* 0*. Ezt már megcsináltuk a Goursat-lemmával, de a Green-tétel is működik:*

$$\int_{\partial K} \langle f, \, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle = \int_{\partial K} f_1 \, \mathrm{d}x + \int_{\partial K} f_2 \, \mathrm{d}y = -\int_K \frac{\partial f_1}{\partial y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_K \frac{\partial f_2}{\partial x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0.$$

1.10. megjegyzés. *A fentiek elmondhatók olyan tartományokra is, amelyeket egynél több zárt görbe határol, ha a görbéket megfelelően irányítjuk. Legyen $K \subset G$ olyan halmaz, amelynek határa véges sok, diszjunkt, egyszerű zárt, rektifikálható görbéből áll (a továbbiakban: krumpli), akkor K határgörbéit lehetséges úgy irányítani, hogy az K külső pontjaikra vonatkozó indexe* 0*, a belső pontokra az indexösszeg* $+1$ *legyen. A továbbiakban ∂K (a krumpli héja) ezeknek az irányított határgörbéknek a halmazát fogja jelenteni, és az $\int_{\partial K}$ a görbéken vett integrálok összegét.*

Az összeragasztós-approximálós módszer ezekre is működik, így a Green-tétel és fenti következményei az ilyenekre is kiterjeszthetők.

A továbbiakban γ mindig szakaszonként folytonosan differenciálható lesz.

1.11. definíció. *A γ sebességvektora a t időpontban $\dot\gamma(t) = \big(\dot x(t), \dot y(t)\big)$. Ha ez nem a nullvektor, akkor az "érintővektor" $\mathbf{t} = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \frac{(\dot x,\dot y)}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}$. Ennek $(-90°)$-kal elforgatottja a "külső normális": $\mathbf{n} = \frac{(\dot y,-\dot x)}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}$.*

Az ívhossz szerinti integráloknál használni fogjuk a $\mathrm{d}s = |\,\mathrm{d}x|$, a terület szerinti integráloknál az $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ jelöléseket. A szokásos helyettesítésekkel a görbén

$$\mathbf{t}\,\mathrm{d}s = (\,\mathrm{d}x,\,\mathrm{d}y), \quad \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = (\,\mathrm{d}y, -\,\mathrm{d}x).$$

1.12. tétel (Newton–Leibniz formula)**.** *Ha $\mathrm{cl}(K) \subset G \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő Jordan-tartomány, aminek a határa pozitív irányítású, szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, és $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_K \operatorname{grad} f\ \mathrm{d}A = \int_{\partial K} f\mathbf{n}\,\mathrm{d}s.$$

Bizonyítás.

$$\int_{\partial K} f\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_{\partial K} f\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}y\\ -\,\mathrm{d}x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\int_{\partial K} f\,\mathrm{d}y\\ -\int_{\partial K} f\,\mathrm{d}x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\int_K D_x f\mathrm{d}A\\ \int_K D_y f\mathrm{d}A\end{pmatrix} = \int_K \operatorname{grad} f\ \mathrm{d}A.$$

1.13. megjegyzés. *Elmondhatjuk ugyanezt egydimenzióban, egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvényre. A határ két, egységnyi súlyú pontból áll: a felső végpontban a "kifelé mutató normálvektor" a $+1$, az alsó végpontban -1. Ezért $\int_{[a,b]} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\cdot(-1) + f(b)\cdot(+1)$.*

1.14. mese. *A kertünkben feltörő talajvíz forráserőssége és -sűrűsége.*

1.15. definíció. *Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt és $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^p$ differenciálható. Az $\mathbf{f}$ vektormező "divergenciája" vagy "forrássűrűsége"*

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = D_1 f_1 + D_2 f_2 + \ldots + D_p f_p = \langle\nabla, f\rangle = \operatorname{tr} f' = \nabla^t\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_p\end{pmatrix}$$

1.16. tétel. *A divergencia nem függ a koordinátarendszer irányától.*

Bizonyítás. Általában, mi történik, ha a szokásos koordináta-rendszerről a $(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_p)$ koordináta-egységvektorokra térünk át? Az új koordináta vektorokból egy $T = (\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_p)$ mátrixot készíthetünk, ami ortogonális (azaz $T^tT = TT^t = I$ avagy $T^{-1} = T^t$), és pozitív irányítású (azaz $\det T = 1$). Ha egy vektor koordinátái a régi rendszerben $\mathbf{x}$, az új rendszerben $\mathbf{y}$, akkor $\mathbf{y} = T^t\mathbf{x}$.

A T transzformáció megtartja a skaláris szorzatot: tetszőleges $\mathbf{x},\mathbf{y}$ vektorokra

$$\langle T^t\mathbf{x}, T^t\mathbf{y}\rangle = (T^t\mathbf{x})^t(T^t\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t(TT^t)\mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{y} = \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle.$$

Az $\mathbf{u}_i$ irányú iránymenti derivált $D_{\mathbf{u}_i} = \mathbf{u}_i^t\nabla$; az új rendszerben a deriváló operátor

$$\nabla_{\text{új}} = \begin{pmatrix}D_{\mathbf{u}_1}\\ \vdots\\ D_{\mathbf{u}_p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1^t\\ \vdots\\ \mathbf{u}_p^t\end{pmatrix}\nabla = T^t\nabla.$$

Avagy, skalármező gradiensvektora az új koordináta-rendszerben

$$\operatorname{grad}_{\text{új}} f = T^t\operatorname{grad}_{\text{régi}} f.$$

A vektormezőket is az új koordináta-rendszerben írjuk fel, tehát $\nabla_{\text{új}}$-t nem az $\mathbf{f} = \begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_p\end{pmatrix}$ függvényre, hanem az $\mathbf{f}_{\text{új}} = T^t\mathbf{f}$ fügvényre kell alkalmaznunk.

Tehát

$$\operatorname{div}_{\text{új}}\mathbf{f}_{\text{új}} = \nabla_{\text{új}}^t\mathbf{f}_{\text{új}} = (\nabla^tT)(T^t\mathbf{f}) = \nabla^t(TT^t)\mathbf{f} = \nabla^t\mathbf{f} = \operatorname{div}\mathbf{f}.$$

1.17. tétel (2-dimenziós Gauss-Osztrogradszkij tétel, divergenciatétel)**.** *Ha* $\mathrm{cl}(K) \subset G \subset \mathbb{R}^2$ *egyszeresen összefüggő Jordan-tartomány, aminek a határa pozitív irányítású, szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, és* $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^2$ *folytonosan differenciálható vektormező, akkor*

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{f} \, \mathrm{d}A = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, n \, \mathrm{d}s \rangle.$$

Bizonyítás.

$$\int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, n \, \mathrm{d}s \rangle = \int_{\partial K} (f_1(-\,\mathrm{d}y) + f_2 \, \mathrm{d}x) = -\int_{\partial K} f_1 \, \mathrm{d}y + \int_{\partial K} f_2 \, \mathrm{d}x = \int_K D_x f_1 \mathrm{d}A + \int_K D_y f_y \mathrm{d}A = \int_K \operatorname{div} \mathbf{f} \, \mathrm{d}A.$$

1.18. megjegyzés. *A Gauss-Osztrogradszkij tétel lehetőséget ad a divergencia egy koordinátafüggetlen definíciójára, egy pontra összehúzódó krumplikkal.*

1.19. mese. *A kertünkben örvénylő erőtér örvényerőssége és -sűrűsége*

1.20. definíció. *Két dimenzióban az* f *vektormező "rotációja" vagy "örvénysűrűsége"*

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = D_1 f_2 - D_2 f_1 = \nabla \times f = \det(\nabla, \mathbf{f})$$

1.21. tétel. *A rotáció nem függ a koordinátarendszer irányától.*

Bizonyítás.

$$\operatorname{rot}_{\text{új}} \mathbf{f}_{\text{új}} = \det(\nabla_{\text{új}}, \mathbf{f}_{\text{új}}) = \det(T^t \nabla, T^t \mathbf{f}) = \det\left(T^t \cdot (\nabla, \mathbf{f})\right) = \det T^t \cdot \det(\nabla, \mathbf{f})\big) = 1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{f}.$$

1.22. tétel (Stokes)**.** *Ha* $\mathrm{cl}(K) \subset G \subset \mathbb{R}^2$ *egyszeresen összefüggő Jordan-tartomány, aminek a határa pozitív irányítású, szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, és* $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^2$ *folytonosan differenciálható vektormező, akkor*

$$\int_K \operatorname{rot} \mathbf{f} \, \mathrm{d}A = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle = -\int_{\partial K} \mathbf{f} \times (\mathbf{n} \, \mathrm{d}s).$$

Bizonyítás. A második két integrál ugyanaz, mert

$$-\mathbf{f} \times (\mathbf{n} \, \mathrm{d}s) = -(f_1, f_2) \times (\, \mathrm{d}y, -\,\mathrm{d}x) = f_1 \, \mathrm{d}x + f_2 \, \mathrm{d}y = \langle \mathbf{f}, \, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle.$$

Ezután a Green-tételt kétszer alkalmazva,

$$\int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle = \int_{\partial K} (f_1 \, \mathrm{d}x + f_2 \, \mathrm{d}y) = \int_K \Big(-D_2 f_1 + \int_A D_1 f_2 \Big) \, \mathrm{d}A = \int_K (\operatorname{rot} \mathbf{f}) \, \mathrm{d}A.$$

1.23. megjegyzés. *A Stokes-tétel lehetőséget ad a rotáció koordinátafüggetlen definíciójára, egy pontra összehúzódó krumplikkal.*

Feladatok

1.1. feladat. *Ellenőrizzük közvetlenül, és vezessük le a Newton–Leibniz forulából és a Stokes-tételből is, hogy tetszőleges* K *Jordan-krumplira*

$$\int_{\partial K} \mathbf{n} \, \mathrm{d}s = 0.$$

1.2. feladat. *Írjuk fel olyan folytonosan differenciálható* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvényt, amire igaz, hogy tetszőleges, egységnyi sűrűségű* $K \subset \mathbb{R}^2$ *Jordan-krumpli origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka egyenlő az* f *függvény* ∂K*-n vett, (a)* x *szerinti vonalintegráljával; (b)* y *szerinti vonalintegráljával; (c) mindkettővel.*

1.3. feladat. *Írjuk fel olyan folytonosan differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amire igaz, hogy tetszőleges, A területű $K \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-krumpli súlypontja*

$$\frac{1}{A} \int_{\partial K} f\mathbf{n} \ \mathrm{d}s.$$

1.4. feladat. *Legyen $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, és $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, ha $|t| \leq \alpha$.*

$$\int_\gamma n \, \mathrm{d}s = ?$$

1.5. feladat. *A* grad, div, rot *operációkból 9-féle kompozíció készíthető:* grad rot *stb. Ezek közül melyek értelmesek? Melyek azonosan nullák?*

1.6. feladat. *Igazoljuk, hogy minden (elég sima) $R^2 \to \mathbb{R}^2$ vektormező felbontható egy divergenciamentes és egy rotációmentes vektormező összegére.*

2. Integráltételek három dimenzióban

Folytonsan differenciálható paraméteres felületek. Felszín, normálvektor. Felszín szerinti és felületi integrálok. A Green-tétel térbeli megfelelője. 3-dimenziós NL-formula. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Rotáció. A rotáció független a koordináta-rendszertől. Stokes-tétel. Kelvin-Stokes tétel (bizonyítás nélkül). Kapcsolat a Maxwell-egyenletek differenciális és integrális alakjai között. [LTS2, 211–221. o.]

2.1. definíció. *Ha $P \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$, akkor a $P \to \mathbb{R}^3$ függvényeket fogjuk "paraméteres felületnek" hívni. Beszélhetünk folytonos, differenciálható, folytonosan differenciálható, darabonként folytonosan differenciálható felületekről is.*

2.2. mese. *A felszínt nem lehet egyszerűen a beírt poligonok felszínének szuprémumaként definiálni (ld. hengerbe beírt lampion).*

2.3. definíció. *Ha $S : P \to \mathbb{R}^3$ darabonként folytonosan differenciálható felület, akkor*

$$\overrightarrow{\mathrm{d}A} = D_1S \times D_2S \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \qquad |\mathrm{d}A| = |\overrightarrow{\mathrm{d}A}|, \qquad \mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}A}}{|\mathrm{d}A|} = \frac{D_1S \times D_2S}{|D_1S \times D_2S|}$$

(területelem, felszínelem, irányított normálvektor).

Az S felület felszíne

$$A = \int_{u,v\in P} |D_1S \times D_2S| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_S |\mathrm{d}A|.$$

Ha f valamilyen skalár- vagy vektormező, akkor f "felszín szerinti integrálja" az S felületen

$$\int_S f|\mathrm{d}A| = \int_{(u,v)\in P} f(S(u,v))\ |D_1S \times D_2S| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Ha $*$ valamilyen szorzás (bilineáris függvény), akkor

$$\int_S f * \overrightarrow{\mathrm{d}A} = \int_{(u,v)\in P} f(S(u,v)) * (D_1S \times D_2S) \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Speciálisan, ha $*$ a skaláris szorzás, akkor f "felület szerinti integrálja" az S felületen

$$\int_S \langle f, \overrightarrow{\mathrm{d}A}\rangle = \int_{(u,v)\in P} \Big\langle f(S(u,v)), D_1S \times D_2S\Big\rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

2.4. megjegyzés. *Ha $S(u,v) = (u,v,\varphi(u,v))$ egy kétváltozós függvény grafikonja, akkor a "felfelé" mutató területvektor*

$$\overrightarrow{\mathrm{d}A} = \begin{pmatrix} -D_u\varphi \\ -D_v\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

A grafikon felszíne tehát

$$A = \int_{(u,v)\in P} \sqrt{(D_u\varphi)^2 + (D_v\varphi)^2 + 1} \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

(Kb. ezt is várjuk.)

2.5. megjegyzés. *Meg lehetne vizsgálni, mi történik, ha a felületet átparaméterezzük egy $\varphi : Q \to P$ leképezéssel...*

2.6. lemma. *(a Green-tétel három-dimenziós változatának is tekinthető) Ha $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, továbbá $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, végül $i \in \{1,2,3\}$, akkor*

$$\int_K D_if \,\mathrm{d}V = \int_{\partial K} f \,\overrightarrow{\mathrm{d}A}_i.$$

($\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ a térfogatelem; $\overrightarrow{\mathrm{d}A}_i$ a $\overrightarrow{\mathrm{d}A}$ területvektor i-edik koordinátája.)

Bizonyítás. (Csak szép normáltartományokra.) Legyen $i = 3$, tegyük fel, hogy K normáltartomány a P szép paramétertartomány fölött. A alsó és a felső grafikon legyen most is $\varphi(x, y)$ és $\psi(x, y)$, tehát $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in P, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$. A határ függőleges darabjain $\overrightarrow{\mathrm{d}A}_3 = 0$, tehát a z szerinti integrál 0. Az alsó grafikonon a lefelé mutató normálvektort kell használnunk.

$$\int_{\partial K} f \overrightarrow{\mathrm{d}A}_i = \int_P f(x, y, \psi(x, y)) \begin{pmatrix} -D_1\psi(x, y) \\ -D_2\psi(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}_3 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_P f(x, y, \varphi(x, y)) \begin{pmatrix} D_1\varphi(x, y) \\ D_2\varphi(x, y) \\ -1 \end{pmatrix}_3 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_P \Big(f(x, y, \psi(x, y)) - f(x, y, \varphi(x, y)) \Big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_P \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} D_3 f(x, y, z)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_K D_3 f\, \mathrm{d}V.$$

2.7. tétel (Newton–Leibniz formula)**.** *Ha $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, továbbá $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_K \operatorname{grad} f\, \mathrm{d}V = \int_{\partial K} f \overrightarrow{\mathrm{d}A}.$$

Bizonyítás. A Lemmát háromszor alkalmazva,

$$\int_K \operatorname{grad} f\, \mathrm{d}V = \int_K \begin{pmatrix} D_1 f\, \mathrm{d}V \\ D_2 f\, \mathrm{d}V \\ D_3 f\, \mathrm{d}V \end{pmatrix} = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} f\overrightarrow{\mathrm{d}A}_1 \\ f\overrightarrow{\mathrm{d}A}_2 \\ f\overrightarrow{\mathrm{d}A}_3 \end{pmatrix} = \int_{\partial K} f \overrightarrow{\mathrm{d}A}.$$

2.8. következmény.

$$\int_{\partial K} \overrightarrow{\mathrm{d}A} = 0.$$

Bizonyítás. Newton–Leibniz formula a konstans 1 függvényre.

2.9. tétel (3-dimenziós Gauss-Osztrogradszkij tétel, divergenciatétel)**.** *Ha $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, továbbá $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}\, \mathrm{d}V = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \overrightarrow{\mathrm{d}A} \rangle.$$

Bizonyítás.

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}\, \mathrm{d}V = \int_K \Big(D_1 f_1\, \mathrm{d}V + D_2 f_2\, \mathrm{d}V + D_3 f_3\, \mathrm{d}V \Big) = \int_{\partial K} \Big(f_1 \overrightarrow{\mathrm{d}A}_1 + f_2 \overrightarrow{\mathrm{d}A}_2 + f_3 \overrightarrow{\mathrm{d}A}_3 \Big) = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \overrightarrow{\mathrm{d}A} \rangle.$$

2.10. definíció. *Az $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^3$ vektormező rotációja*

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \det(\nabla, \mathbf{f}, \mathbf{1}) = \begin{pmatrix} D_2 f_3 - D_3 f_2 \\ D_1 f_1 - D_1 f_3 \\ D_3 f_2 - D_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

2.11. megjegyzés. *A rotációt tekinthetjük egy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineáris függvénynek:*

$$\mathbf{x} \mapsto \langle \operatorname{rot} \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle.$$

2.12. tétel. *A rotáció nem függ a koordinátarendszer irányától.*

Bizonyítás. Megint vegyük a T transzformációt; azt fogjuk megmutatni, hogy bármilyen $\mathbf{v}$ vektorra

$$\langle \mathrm{rot}_{\text{új}}\, \mathbf{f}_{\text{új}}, \mathbf{v}_{\text{új}} \rangle = \langle \mathrm{rot}\, \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

És valóban,

$$\langle \mathrm{rot}_{\text{új}}\, \mathbf{f}_{\text{új}}, \mathbf{v}_{\text{új}} \rangle = \det(\nabla_{\text{új}}, \mathbf{f}_{\text{új}}, \mathbf{v}_{\text{új}}) = \det(T^t\nabla, T^t\mathbf{f}, T^t\mathbf{v}) = \det\Big(T^t \cdot (\nabla, \mathbf{f}, \mathbf{v})\Big) = \det(\nabla, \mathbf{f}, \mathbf{v}) = \langle \mathrm{rot}\, \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

2.13. tétel (Stokes). *Ha $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, továbbá $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_K \mathrm{rot}\, \mathbf{f}\ \mathrm{d}V = -\int_{\partial K} \mathbf{f} \times \mathrm{d}\overrightarrow{A}.$$

Bizonyítás.

$$\int_K \mathrm{rot}\, \mathbf{f}\ \ \mathrm{d}V = \begin{pmatrix} \int_K D_2 f_3\ \mathrm{d}V - \int_K D_3 f_2\ \mathrm{d}V \\ \int_K D_3 f_1\ \mathrm{d}V - \int_K D_1 f_3\ \mathrm{d}V \\ \int_K D_1 f_2\ \mathrm{d}V - \int_K D_2 f_1\ \mathrm{d}V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\partial K} f_3 \mathrm{d}\overrightarrow{A}_2 - \int_{\partial K} f_2 \mathrm{d}\overrightarrow{A}_3 \\ \int_{\partial K} f_1 \mathrm{d}\overrightarrow{A}_3 - \int_{\partial K} f_3 \mathrm{d}\overrightarrow{A}_1 \\ \int_{\partial K} f_2 \mathrm{d}\overrightarrow{A}_1 - \int_{\partial K} f_1 \mathrm{d}\overrightarrow{A}_2 \end{pmatrix} = \int_{\partial K} (-\mathbf{f} \times \mathrm{d}\overrightarrow{A}).$$

2.14. mese. *Gauss-Osztrogradszkij tétel szerint divergenciamentes vektormezőnek minden szép krumpli határán nulla a felületi integrálja. Ez lehetőséget ad a primitív függvényről szóló fejezet általánosítására: meg lehetne csinálni a Goursat-lemma felületi integrálokról szóló variánsát, és bebizonyítani, hogy minden nullhomotóp zárt felületen (vagy akár csak poliéderen) nulla a felületi integrál. Ezzel az eszközzel be tudjuk bizonyítani például azt, hogy $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ nem homeomorf $\mathbb{R}^3$-bel.*

2.15. tétel (Kelvin–Stokes). *Ha $S \subset G$ egy irányított, peremes felület, ami mondjuk darabonként folytonosan differenciálható, a határa pedig rektifikálható, valamint $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható vektormező, akkor $\int_S \langle \mathrm{rot}\, \mathbf{f}, \mathrm{d}\overrightarrow{A} \rangle = \int_{\partial S} \langle \mathbf{f},\ \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle$.*

2.16. mese. *(Maxwell-egyenletek) Az I. és III. egyenletnél a Gauss-Osztrogradszkij tétel, a II. és IV. egyenletnél a Kelvin-Stokes tétel a kapcsolat a differenciális és az integrális alakok között.*

Maxwell-egyenletek

Megnevezés	Sorszám	Differenciális alak	Integrális alak
Gauss-törvény	I.	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$
Faraday-Lenz-törvény	II.	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$
Gauss mágneses törvénye	III.	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
Ampère-törvény	IV.	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$

Feladatok

2.1. feladat. *Legyen $P = \{(u,v) \in [0,1]^2 : u^2+v^2 \le 1\}$, $g(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$, $F = g(P)$ és $f(x,y,z) = (x,y,z)$. Írjuk át (esetleg többszörös) Riemann-integrállá a következő felszíni/felületi integrálokat.*

$$\int_F \mathrm{d}\overrightarrow{S}; \quad \int_F |\ \mathrm{d}S|; \quad \int_F \left\langle f,\ \mathrm{d}\overrightarrow{S} \right\rangle; \quad \int_F f \times\ \mathrm{d}\overrightarrow{S}.$$

2.2. feladat. *Rögzített $a \in \mathbb{R}^3$ mellett legyen (a) $f(x) = x \times a$ $(x \in \mathbb{R}^3)$; (b) $f(x) = a \times x$ $(x \in \mathbb{R}^3)$.*

$$\operatorname{div} f = ? \qquad \operatorname{rot} f = ?$$

2.3. feladat. *Állapítsuk meg, hogy a* $\operatorname{div}, \operatorname{rot}, \operatorname{grad}$ *operátorok lehetséges 9 párosításából (*$\operatorname{div}\operatorname{div}, \operatorname{div}\operatorname{rot}, \dots$*) melyek alkalmazhatóak kétszer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvényre, illetve $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezésre, és közülük melyek adnak mindig nullát!*

2.4. feladat. *Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sima (akárhányszor differenciálható) vektormező. Igazold, hogy*

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} f = \operatorname{grad}\operatorname{div} f - \begin{pmatrix} \operatorname{div}\operatorname{grad} f_1 \\ \operatorname{div}\operatorname{grad} f_2 \\ \operatorname{div}\operatorname{grad} f_3 \end{pmatrix}.$$

2.5. feladat. *Legyen $f_1(x, y, z) = xyz$ és $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Konstruálj olyan $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt, amire az (f_1, f_2, f_3) vektormező felületi integrálja tetszőleges zárt gömfelületen megegyezik a gömb térfogatával.*

2.6. feladat. *Legyen $B = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$ az egységgömb, és legyen $f(x, y, z) = (yz, x - z, z - y)$.*

$$(a) \quad \int_{\partial B} \left\langle f, \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle = ? \qquad (b) \int_{\partial B} f \times \overrightarrow{\mathrm{d}S} = ?$$

2.7. feladat. *Számítsuk ki az r sugarú gömb felszínét a divergenciatételből, az $f(x, y, z) = (x, y, z)$ vektormező felületi integráljából.*

2.8. feladat. *Vegyük az egységgömbfelületnek az első térnyolcadba eső részét. Hol van ennek a súlypontja?*

2.9. feladat. *Az $F \subset \mathbb{R}^3$ konvex sokszöget a g zárt, irányított töröttvonal határolja. A síklap jobbkézszabály szerint irányított területvektora $\vec{A}$. Igazold, hogy*

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \int_g \mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Hogyan lehet ezt az állítást visszavezetni a Kelvin-Stokes tételre?

2.10. feladat. *Igazoljuk, hogy a Gauss-Osztrogradszkij és a Stokes-tétel akkor is teljesül (mondjuk tetraéderre, majd poliéderekre), ha a vektormező differenciálható, és a koordinátafüggvényeinek a parciális deriváltjai integrálhatók.*

2.11. feladat. *Az $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$ vektormező akárhányszor differenciálható, divergenciamentes, és az origó egy pontozott környezetében korlátos. Bizonyítsd be, hogy van olyan $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$ vektormező, amire $f = \operatorname{rot} g$.*

2.12. feladat. *Mi lehetne a parciális integrálás a 3-dimenziós divergenciatétellel?*

2.13. feladat. *(a) Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ és $\phi_t(u, v)$ egy $[0, 1]^3 \to G$ folytonosan differenciálható paraméteres felületsereg, ami az egységnégyzet minden rögzített (u, v) határpontjára független a t paramétertől. Legyen $F : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, divergenciamentes vektormező. Mutasd meg, hogy az $I(t) = \int_0^1 \int_0^1 \langle D_x\phi_t(x, y) \times D_y\phi_t(x, y), F(\phi_t(x, y)) \rangle \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ paraméteres felületi integrál nem függ t-től.*

(b) Legyen $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Konstruálj olyan $G \to \mathbb{R}^3$ divergenciamentes vektormezőt, aminek az egységgömbön vett felületi integrálja nem 0.

(c) Igazold, hogy $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ halmazban az egységgömbfelület nem nullhomotóp.

(d) Igazold, hogy G nem homeomorf $\mathbb{R}^3$-nel.

2.14. feladat. *Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező akárhányszor differenciálható és divergenciamentes. Bizonyítsd be, hogy van olyan $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, amire $f = \operatorname{rot} g$.*

2.15. feladat. *Mutassuk meg, hogy minden $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$ sima vektormező előáll egy divergenciamentes és egy rotációmentes vektormező összegeként.*