An4 vázlat

(Utolsó módosítás: 2018. március 6., 22:54)

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.

3. A Lebesgue-mérték

[Petruska, 51–52, 55, 69, 81–82. o.]

Halmazrendszerek, megszorítás. Additív és σ-additív halmazfüggvények. Halmazalgebra, gyűrű, modulus, félgyűrű, σ-algebra, σ-gyűrű. Generált struktúrák. Halmazstruktrák megszorításai. Borel-halmazok top. terekben. Mérhető tér. Mérték. Megszámlálható unió és metszet mértéke.

3.1. Mérhető terek és mértékek

Alaphalmaz és részhalmazai (nagy betűk, X), halmazrendszerek (írott nagy betűk, $\mathcal{P}(X)$), $\ni \emptyset$, halmazfüggvények (kis görög betűk)

3.1. definíció. *Halmazalgebra, σ-algebra, gyűrű, σ-gyűrű, modulus és félgyűrű. Halmazrendszer megszorítása. Generált algebra, σ-algebra, gyűrű, σ-gyűrű, modulus. Borel-halmazok. (G_δ, $F_{\sigma\delta}$ stb. halmazok.) Mérhető tér.*

3.2. definíció. *Halmazfüggvény. Monoton, additív, σ-additív, szubadditív, σ-szubadditív függvények. Mérték.*

3.3. lemma. *Ha μ mérték, $A_1, \dots, A_n$ páronként diszjunkt mérhetők, akkor $\mu(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.*
Ha $A \subset B$, akkor $\mu(A) \le \mu(B)$.
Ha $A \subset B$ és $\mu(A) < \infty$, akkor $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3.4. tétel. *Ha $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, akkor $\mu(\cup A_n) = \lim \mu(A_n)$.*
Ha $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ és $\mu(A_1) < \infty$, akkor $\mu(\cap A_n) = \lim \mu(A_n)$. (V.ö. $A_n = (n, \infty)$)

3.2. Lebesgue-mérték

3.5. tétel (álomgyilkos tétel)**.** *Nem létezik pozitív, normált, eltolásinvariáns, σ-additív $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ függvény.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekte, hogy mégis létezik egy ilyen μ függvény.

A $C = [0,1)^n$ kockában legyen két pont ekvivalens, ha a különbségük minden koordinátája racionális. Legyen $A \subset C$ olyan halmaz, amely minden ekvivalenciaosztályból pontosan egy pontot tartalmaz. Ennek megszámlálható sok eltoltja lefedi C-t, tehát $\mu(A) > 0$. Másrészt mindegyik eltolt része a $[-1,2)^n$ kockának, ezek diszjunktak, tehát $\mu(A) = 0$...

3.6. definíció. *Lebesgue-féle külső mérték $\mathbb{R}^p$-ben, $\overline{\lambda}$*
(a) Fedés téglákkal;
(b) Fedés Jordan-mérhető halmazokkal

3.7. tétel.
A kétféle definíció ekvivalens.
$\overline{\lambda}(\emptyset) = 0$.
$\overline{\lambda}$ *monoton.*
$\overline{\lambda} \le k$ *(Jordan-féle külső mérték)*
Ha K kompakt, akkor $\overline{\lambda}(K) = k(K)$.

Ha A Jordan-mérhető, akkor $\overline{\lambda}(A) = t(A)$.
Egybevágóságinvariáns
$\overline{\lambda}(c \cdot A) = |c|^p \cdot \overline{\lambda}(A)$.
A $\overline{\lambda}$ függvény σ-szubadditív.

3.8. mese. *Megszámlálható sok belső tégla nem definál új belső mértéket.*

3.9. definíció. *A Lebesgue-féle belső mérték lehetne akár ez is: ha $A \subset [0,1]^p$, akkor*

$$\underline{\lambda}(A) = 1 - \overline{\lambda}([0,1]^p \setminus A)$$

Általában

$$\underline{\lambda}(A) = \sum_{(a_1,\ldots,a_p)\in\mathbb{Z}^p} \left(1 - \overline{\lambda}\Big([a_1, a_1+1) \times \ldots \times [a_p, a_p+1) \setminus A\Big)\right)$$

(V.ö. Ha J Jordan-mérhető és $A \subset J$, akkor $b(A) = t(J) - k(J \setminus A)$.)

3.10. megjegyzés. *A mérhetőséget a külső és a belső mértékek egyenlőségével is lehetne definiálni, de inkább mélyen hallgatni fogunk a belső mértékről, és a szokásos módon, kettévágással definiáljuk.*

3.11. definíció. *$A \subset \mathbb{R}^p$ Lebesgue-mérhető, ha minden $H \subset \mathbb{R}^p$ esetén $\overline{\lambda}(H) = \overline{\lambda}(H \cap A) + \overline{\lambda}(H \setminus A)$.*
(A szubadditivitás miatt $\leq$ automatikus; a kérdés az, hogy $=$ vagy $<$.)

3.12. tétel. *A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, és ezen a Lebesgue-mérték σ-additív. (Bizonyítás a következő fejezetben). A jele $\lambda(...)$ vagy $\lambda_p(...)$.*

3.13. tétel. *Minden Jordan-mérhető halmaz egyben Lebesgue-mérhető is, tehát a Lebesgue-mérték tényleg kiterjesztése a Jordan-mértéknek. (Bizonyítás a következő fejezetben).*

3.14. definíció. *$A \subset \mathbb{R}^p$ "nullmértékű" vagy "Lebesgue-nullmértékű", ha $\overline{\lambda}(A) = 0$.*

3.15. tétel. *Minden nullmértékű halmaz mérhető.*

3.16. példa. *Q Lebesgue-mérhető, del nem Jordan-mérhető.*

3.17. tétel. *Minden pozitív külső mértékű halmaz tartalmaz nem mérhető halmazt.*

4. A mértékkiterjesztési tétel

[Petruska, 63–70. o.]

Relatív külső mérték és külső mérték. Nemnegatív halmazfüggvényhez asszociált külső mérték. A mérhető halmazok σ-algebrája. Félgyűrűn additív RKM egyértelműen kiterjeszthető a generált gyűrűre. Mértékkiterjesztési tétel. A kiterjesztés egyértelműsége σ-véges térben. Példa arra, hogy a kiterjesztés nem mindig egyértelmű. (Petruska II, 12. fej.)

4.1. definíció. *Legyen $X \neq \emptyset$, $\emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Az $\alpha : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ leképezés "relatív külső mérték", ha*
1. $\alpha(\emptyset) = 0$, és
2. Bármely $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ esetén $\alpha(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(A_n)$.
Ha $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, akkor α "külső mérték".

4.2. példa.

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(X),\ \alpha(H) = \begin{cases} 1 & ha\ H \neq \emptyset \\ 0 & ha\ H = \emptyset \end{cases};$$

$\mathcal{A}$ a Jordan-mérhető halmazok gyűrűje; α a Jordan-mérték

4.3. megjegyzés.
Minden mérték egyben külső mérték is.
Minden relatív külső mérték monoton.

4.4. definíció. *Legyen $X \neq \emptyset$, $\emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ relatív külső mérték. $H \subset X$ esetén legyen*

$$\varphi_\alpha(H) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(A_n) : A_n \in \mathcal{A}, H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

(Ha H nem fedhető le, akkor $\varphi_\alpha(H) = \infty$.)

A neve: az α-hoz asszociált külső mérték.

4.5. lemma.

1. $\varphi_\alpha(...)$ külső mérték.

2. Bármely $A \in \mathcal{A}$-ra $\varphi_\alpha(A) \leq \alpha(A)$.

3. Ha φ külső mérték X-en, amire $A \in \mathcal{A}$ esetén $\varphi(A) \leq \alpha(A)$, akkor $\varphi \leq \varphi_\alpha$.

Vagyis, az α-nál nem nagyobb külső mértékek között φ_α maximális.

4.6. példa. *A fenti példában az asszociált külső mértékek: ő maga,illetve a külső Lebesgue-mérték.*

4.7. definíció. *Legyen φ külső mérték X-en. Az $A \subset X$ halmaz φ-re nézve mérhető, ha bármely $H \subset X$ esetén*

$$\varphi(H) = \varphi(H \cap A) + \varphi(H \setminus A).$$

A φ-mérhető halmazok rendszere $\mathcal{M}_\varphi$.

4.8. megjegyzés. *Megint csak a szubadditivitás miatt elég azt előírni, hogy $\varphi(H) \geq \varphi(H \cap A) + \varphi(H \setminus A)$, és ez persze triviális akkor,ha $\varphi(H) = \infty$.*

4.9. tétel. *A fenti jölésekkel $\mathcal{M}_\varphi$ σ-algebra és $(X, \mathcal{M}_\varphi, \varphi)$ mértéktér. Sőt, tetszőleges $Y \subset X$ halmazra φ mérték az $\mathcal{M}_\varphi|_Y$ σ-algebrán is.*

Bizonyítás. 0. Az X és $\emptyset$ mérhető.

Most használjuk, hogy $\varphi(\emptyset) = 0$.

1. Az $\mathcal{M}_\varphi$ algebra, azaz ha A, B mérhető, akkor $A \cup B$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ is mérhető:

Legyen $H \subset X$ tetszőleges. Az A, B halmazok a H-t négy részre osztják: $H = H_0 \cup H_a \cup H_b \cup H_{ab}$ (az indexek azt jelzik, hogy az adott részhalmaz az A és B közül melyiknek része. Az A, B mérhetősége miatt

$$\varphi(H) = \varphi(H \cap A) + \varphi(H \setminus A) = \Big(\varphi(H_{ab}) + \varphi(H_a)\Big) + \Big(\varphi(H_b) + \varphi(H_0)\Big).$$

Átcsoportosítva és a szubbaditivitást felhasználva

$$\varphi(H) \leq \varphi(H \cap (A \cup B)) + \varphi(H \setminus (A \cup B)) \leq \Big(\varphi(H_{ab}) + \varphi(H_a) + \varphi(H_b)\Big) + \varphi(H_0) = \varphi(H);$$

$$\varphi(H) \leq \varphi(H \cap (A \cap B)) + \varphi(H \setminus (A \cap B)) \leq \varphi(H_{ab}) + \Big(\varphi(H_a) + \varphi(H_b) + \varphi(H_0)\Big) = \varphi(H);$$

$$\varphi(H) \leq \varphi(H \cap (A \cap B)) + \varphi(H \setminus (A \cap B)) \leq \varphi(H_a) + \Big(\varphi(H_b) + \varphi(H_{ab}) + \varphi(H_0)\Big) = \varphi(H).$$

Látjuk, hogy mindenhol egyenlőség van, tehát $A \cup B$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ is jól vágja ketté a H halmazt.

2. A φ additív $\mathcal{M}_\varphi|_Y$-n:

Ha A, B mérhetők, és $A \cap Y$ és $B \cap Y$ diszjunktak, akkor A-val vágjuk ketté az $(A \cup B) \cap Y$ halmazt:

$$\varphi\big((A \cup B) \cap Y\big) = \varphi\Big(\big((A \cup B) \cap Y\big) \cap A\Big) + \varphi\Big(\big((A \cup B) \cap Y\big) \setminus A\Big) = \varphi\big(A \cap Y\big) + \varphi\big(B \cap Y\big).$$

Indukcióval akárhány halmazra is igaz.

3. $\mathcal{M}_\varphi$ σ-algebra.

A megszámlálható sok halmaz unióját kicserélhetjük páronként diszjunkt halmazok uniójára: legyen $B_i = A_i \setminus \cup_{j<i} A_j$, ekkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Legyen $U_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ és $U_\infty = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$; azt akarjuk igazolni, hogy U_∞ mérhető.

$$\varphi(H) \overset{U_n \text{ mérhető}}{=} \varphi\big(H \cap U_n\big) + \varphi\big(H \setminus U_n\big) \overset{\varphi \text{ monoton}}{\geq} \varphi\big(H \cap U_n\big) + \varphi\big(H \setminus U_\infty\big) \overset{U_n = \cup B_i}{=}$$
$$= \varphi\Big(\bigcup_{i=1}^n (H \cap B_i)\Big) + \varphi\big(H \setminus U_\infty\big) \overset{\varphi \text{ additív } \mathcal{M}_\varphi|_H\text{-n}}{=} \sum_{i=1}^n \varphi(H \cap B_i) + \varphi\big(H \setminus U_\infty\big).$$

Most $n \to \infty$, majd σ-szubadditivás:

$$\varphi(H) \geq \sum_{i=1}^\infty \varphi(H \cap B_i) + \varphi\big(H \setminus U_\infty\big) \overset{\varphi\ \sigma\text{-szubadditív}}{\geq} \varphi\Big(\bigcup_{i=1}^\infty (H \cap B_i)\Big) + \varphi\big(H \setminus U_\infty\big) = \varphi\big(H \cap U_\infty\big) + \varphi\big(H \setminus U_\infty\big).$$

Tehát U_∞ jól vágja ketté H-t.

4. φ σ-additív $\mathcal{M}_\varphi|_Y$-n:
Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}_\varphi$, és az $A_i \cap Y$ halmazok diszjunktak.

$$\sum_{i=1}^n \varphi(A_i \cap Y) \overset{\varphi \text{ additív } \mathcal{M}_\varphi|_Y\text{-on}}{=} \varphi\Big(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap Y)\Big) \overset{\varphi \text{ monoton}}{\leq} \varphi\Big(\bigcup_{i=1}^\infty (A_i \cap Y)\Big) \overset{\sigma\text{-szubadditív}}{\leq} \sum_{i=1}^\infty \varphi(A_i \cap Y).$$

Most $n \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^\infty \varphi(A_i \cap Y) \leq \varphi\Big(\bigcup_{i=1}^\infty (A_i \cap Y)\Big) \leq \sum_{i=1}^\infty \varphi(A_i \cap Y).$$

Tehát $\varphi\Big(\bigcup_{i=1}^\infty (A_i \cap Y)\Big) = \sum_{i=1}^\infty \varphi(A_i \cap Y)$.

4.10. következmény. *A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak.*

4.11. kérdés. *Igaz-e, hogy minden Jordan-mérhető halmaz Lebesgue-mérhető?*
Általában, igaz-e, hogy ha α relatív külső mérték az $\mathcal{A}$ rendszeren, akkor $\mathcal{A}$ elemei mérhetők φ_α szerint?

4.12. példa. *1. Ha $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $\alpha(H) = \begin{cases} 1 & \text{ha } H \neq \emptyset \\ 0 & \text{ha } H = \emptyset, \end{cases}$ akkor $\varphi_\alpha = \alpha$, de csak $\emptyset$ és X mérhető. (Hiányzik az additivitás.)*

2. Legyen $\mathcal{A} = \{\emptyset\} \cup \{(c, \infty) : c \in \mathbb{R}\}$, $\alpha(\emptyset) = 0$, $\alpha((c,\infty)) = 1$. Az additivitás igaz, csak semmitmondó, most is csak két mérhető halmaz van. (Van additivitás, de túl sovány az $\mathcal{A}$.)

4.13. lemma. *Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ félgyűrű. Tetszőleges $A, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ halmazokhoz létezik olyan m pozitív egész és páronként diszjunkt $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{A}$ halmazok, amelyekre $A \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_n) = C_1 \cup \ldots \cup C_m$.*

Bizonyítás. Indukció. $n = 1$-re éppen azt jelenti, hogy $\mathcal{A}$ félgyűrű. Ha már vannak olyan diszjunkt $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{A}$ halmazok, amelyekre $A \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}) = C_1 \cup \ldots \cup C_m$, akkor

$$A \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_n) = \Big(A \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1})\Big) \setminus B_n = (C_1 \cup \ldots \cup C_m) \setminus B_n = (C_1 \setminus B_n) \cup \ldots \cup (C_m \setminus B_n);$$

az utolsó zárójelek tovább bonthatók diszjunkt $\mathcal{A}$-bel halmazokra.

4.14. tétel. *Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ relatív külső mérték, ami még additív is. Ekkor $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_\varphi$, és $\varphi_\alpha|_{\mathcal{A}} = \alpha$, vagyis minden $\mathcal{A}$-beli halmaz mérhető φ_α szerint, és φ_α az α kiterjesztése.*

Bizonyítás. Azt már tudjuk, hogy $\varphi_\alpha|_{\mathcal{A}} = \alpha$; azt kell igazolni, hogy minden $A \in \mathcal{A}$ mérhető. Legyen tehát $A \in \mathcal{A}$ és $H \subset X$ tetszőleges; a célunk $\varphi_\alpha(H \cap A) + \varphi_\alpha(H \setminus A) \leq \varphi_\alpha(H)$. Ha $\varphi_\alpha(H) = \infty$, akkor ez trivi; feltehetjük tehát, hogy $\varphi_\alpha(H)$ véges.

Vegyünk egy tetszőleges ε-t, és ehhez olyan $B_1, B_2 \ldots \in \mathcal{A}$ halmazokat, amelyek úgy fedik H-t, hogy $\sum \alpha(B_n) < \varphi_\alpha(H) + \varepsilon$.

Mindegyik B_n-re $B_n \cap A \in \mathcal{A}$, és a $B_n \setminus A$ halmaz felbomlik páronként diszjunkt $C_{n1}, \ldots, C_{n,k_n} \in \mathcal{A}$ elemek uniójára. Az additivitás miatt $\alpha(B_n \cap A) + \sum_{i=1}^{k_n} \alpha(C_{ni}) = \alpha(B_n)$.

$$\varphi_\alpha(H \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(B_n \cap A),$$

$$\varphi_\alpha(H \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_\alpha(B_n \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha(C_{ni}),$$

$$\varphi_\alpha(H \cap A) + \varphi_\alpha(H \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha(B_n \cap A) + \sum_{i=1}^{k_n} \alpha(C_{ni}) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(B_n) < \varphi_\alpha(H) + \varepsilon.$$

4.15. példa. *Álljon $\mathcal{A}$ az $\mathbb{R}$ félig nyílt intervallumaiból, és legyen $\alpha(A) = \infty$ ha A nemüres. Ekkor α kiterjeszthető az összes Borel-halmazra, de a kiterjesztés nem egyértelmű. Lehetséges kiterjesztés például a konstans ∞ és a számlálómérték is.*

4.16. definíció. *Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ és $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$. Azt mondjuk, hogy a $H \subset X$ halmaz az α-ra nézve σ-véges, ha léteznek olyan $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{M}$ halmazok, amelyekre $H \subset \bigcup A_n$ és mindegyik $\alpha(A_n)$ véges. (Ld. még: "σ-véges mértéktér".)*

4.17. tétel. *Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ relatív külső mérték, ami még additív is, és tegyük fel, hogy X σ-véges. Bármely $\mathcal{M}$ olyan σ-algebrára, amelyre $\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_\varphi$, az α egyértelműen terjeszthető ki $\mathcal{M}$-re, azaz ha μ mérték $\mathcal{M}$-en, akkor $\mu = \varphi_\alpha|_{\mathcal{M}}$.*

Bizonyítás. A X olyan $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ halmazok uniója, amelyekre minden $\alpha(A_n)$ véges. A 4.13. lemma miatt ezeket kicserélhetjük olyan diszjunkt C_{ij} halmazokra, amelyekre $A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) = C_{n1} \cup \ldots \cup C_{nk_n}$. Ezeket a C_{ni}-ket egy sorozatba rendezve kapunk olyan $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazokat, amelyek uniója X, a mértékük véges, és még diszjunktak is.

A monotonitás miatt bármely $H \in \mathcal{M}$ halmazra és bármelyik n indexre $\mu(H \cap B_n) \leq \varphi_\alpha(H \cap B_n)$ és $\mu(H \setminus B_n) \leq \varphi_\alpha(H \setminus B_n)$, összeadva

$$\alpha(B_n) = \mu(B_n) = \mu(H \cap B_n) + \mu(H \setminus B_n) \leq \varphi_\alpha(H \cap B_n) + \varphi_\alpha(H \setminus B_n) = \varphi_\alpha(B_n) = \alpha(B_n),$$

és itt minden véges volt, tehát például $\mu(H \cap B_n) = \varphi_\alpha(H \cap B_n)$. Összegezve

$$\mu(H) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_\alpha(H \cap B_n) = \varphi_\alpha(H \cap B_n).$$

4.18. következmény (Caratheodory (Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή) féle mértékkiterjesztési tétel)**.** *Ha $\mathcal{A}$ gyűrű $\mathcal{P}(X)$-en, $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ additív és σ-szubadditív, akkor kiterjeszthető az $\mathcal{A}$ által generált σ-gyűrűre.*

Ha X σ-véges, akkor a kiterjesztés egyértelmű.

4.19. következmény. *A Lebesgue-mérték a Jordan-mérték kiterjesztése.*

$\mathbb{R}^p$-n a Lebesgue-mérték az egyetlen pozitív, normált, eltolásinvariáns mérték $\mathcal{L}$-en.

$\mathbb{R}^p$-n a Lebesgue-mérték az egyetlen pozitív, normált, eltolásinvariáns Borel-mérték.

5. Lebesgue-Stieltjes mértékek

Additív intervallumfüggvények 1-dimenzióban. Megengedett intevallumok, folytonssági pontok, folytonssági intervallumok, balról zárt intervallumok. Eloszlásfüggvény. Az eloszlásfüggvény megváltozásából származtatott intervallumfüggvény akkor és csak akkor relatív külső mérték a balról zárt intervallmuok félgyűrűjén, ha az eloszlásfüggvény balról folytonos. 1-dimenziós Lebesgue-Stieltjes mérték. Intervallumok mértékének kifejezése az eloszlásfüggvénnyel.

Kiterjeszés magasabb dimenziókra. Addititív téglafüggvények. Együttes eloszlásfüggvény nem feltétlenül létezik. Folytonossági hipersíkok. A folytonossági hipersíkok. A folytonossági hipersíkok halmaza megszámlálható. p-dimenziós Lebesgue-Stieltjes mértékek.

Mérhető halmaz közelítése véges sok (racionális koordinátájú) téglalap uniójával, nyílt, zárt, kompakt, G_δ és F_σ halmazokkal. (Reguaritás)

[Petruska, 70–75., 59. o.]

5.1. Lebesgue-Stieltjes mértékek egydimenzióban

Most egy darabig egy $G \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum lesz a világ**G**, és a $(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ lokálisan véges Borel-mértékeket vizsgáljuk.

5.1. definíció. $(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ *"lokálisan véges", ha*

(a) Minden pontnak van véges mértékű környezete, azaz $\forall a \in G\ \exists r > 0\ B(a,r) \subset G,\ \mu(B(a,r)) < \infty$*;*

(b) Minden komakt $K \subset G$ *halmaz mértéke véges.*

Ez a kettő ekvivens; (b) $\Longrightarrow$ *(a) triiviális, mert minden pontnak van kompakt környezete; (a)* $\Longrightarrow$ *(b) azért, mert* K *minden pontja körül vehetünk egy-egy véges mértékű környezetet, és a kompaktság miatt ezek közül véges sok is fedi* K*-t.*

5.2. definíció. *Legyen* $\mathcal{A} = \{\emptyset\} \cup \{[a,b) : a,b \in G, a < b\}$ *és* $\alpha : \mathcal{A} \to [0,\infty)$*. Az* $F : G \to \mathbb{R}$ *függvény az* α *halmazfüggvénynek "eloszlásfüggvénye", ha bármely* $[a,b)$ *esetén* $\alpha([a,b)) = F(b) - F(a)$*.*

5.3. lemma. *Az* α*-nak akkor és csak akkor létezik eloszlásfüggvénye, ha additív. Speciálisan, minden lokálisan véges mértéknek létezik eloszlásfüggvénye.*

Bizonyítás. Válasszunk egy $x_0 \in G$ kezdőpontot, és legyen

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = x_0 \\ \alpha([x_0, x)) & \text{ha } x > x_0 \\ -\alpha([x, x-0)) & \text{ha } x < x_0. \end{cases}$$

A többi trivi.

5.4. lemma. *(a) Ha* F *az* $(G, \mathcal{B}(G), \mu)$ *mértéknek eloszlásfüggvénye, akkor* F *balról folytonos.*

(b) A további intervallumtípusok mértéke F*-fel kifejezve*

$$\mu([a,b]) = F(b+0) - F(a), \quad \text{speciálisan } \mu(\{a\}) = F(a+0) - F(a);$$
$$\mu((a,b)) = F(b) - F(a+0), \quad \mu((a,b]) = F(b+0) - F(a+0).$$

5.5. mese. *A megfordítás ezek után olyasmi lenne, hogy kapunk egy monoton növő* $F : G \to \mathbb{R}$ *függvényt, a megváltozásából készítünk additív intervallumfüggvényt, és ezt az additív függvényt kiterjesztjük mértékké. Ha* F *nem minden pontban folytonos balról, akkor baj van.*

Két fontos lehetőséget érdemes megemlíteni: kiköthetjük, hogy csak balról folytonos F*-et engedünk meg (ez történik pl. a valszámban), vagy az intervallumaink* $\mathcal{A}$ *félgyűrűjében nem engedünk meg minden végpontot; pl. csak az* F *folytonossági pontjait engedjük meg. Szerencsére egy monoton függvénynek legfeljebb csak megszámlálható sok szakadási ponntja lehet (mert minden szakaszásnál átugrik racionális számokat, és egy racionális számot legfeljebb csak egyszer ugorhat át), tehát* F *folytonossági pontjai sűrűn vannak* G*-ben.*

Mostantól tehát legyen $F : G \to \mathbb{R}$ monoton növő, $V \subset G$ egy sűrű halmaz (a megengedett **V**égpontok halmaza) úgy, hogy V minden pontjában F balról folytonos. Legyen $\mathcal{A} = \{\emptyset\} \cup \{[a,b) : a,b \in V, a < b\}$ (félgyűrű), $\alpha(\emptyset) = 0$ és $\alpha([a,b)) = F(b) - F(a)$.

5.6. lemma. *Az* α *halmazfüggvény additív és* σ*-szubadditív (vagyis relatív külső mérték).*

Bizonyítás. Az additivitás trivi.

A σ-szubadditivitáshoz tegyük fel, hogy az $A = [a, b) \in \mathcal{A}$ intervallumot fedik a $C_i = [c_i, d_i) \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ intervallumok; azt kell igazolnunk, hogy

$$\alpha(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(C_i).$$

Terv: Az A halmazt egy picit kisebb, de kompakt intervallumra szűkítjük, a C_i halmazokat pedig picit bővebb, nyílt intervallumokra. Utána a kompaktság miatt véges sok C_i is fed, és működik az additivitás.

Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t, egy olyan $b' \in A \cap V$ elemet, amelyre $(F(b') > F(b) - \varepsilon$; ilyen van, mert F balról folytonos b-ben). Az $A = [a, b)$ helyett az $[a, b']$ kompakt halmazt fedjük. Minden i-re egy olyan $c_i' < c$ megengedett végpontot, amelyre $F(c_i') > F(c_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}$. A $C_i = [c_i, d_i)$ helyett a (c_i', d_i) nyílt intervallummal fogunk fedni.

Mivel

$$[a, b'] \subset [a, b) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [c_i, d_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (c_i', d_i),$$

az $[a, b')$ intervallumot fedi az unióból véges sok nyílt is, tehát vannak olyan $i_1, \ldots, i_n$ indexek amelyekre

$$[a, b'] \subset \bigcup_{k=1}^{n} (c_{i_k}', d_{i_k}).$$

Ebből mi annyit használunk, hogy

$$[a, b') \subset \bigcup_{k=1}^{n} [c_{i_k}', d_{i_k}).$$

Az összes intervallumot továbboszthatjuk az összes végpontonttal; a sok kis darab mindegyikét fedi legalább egy $[c_{i_k}', d_{i_k})$...

$$\alpha([a, b')) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha([c_{i_k}', d_{i_k}))$$

$$\alpha([a, b)) - \varepsilon < \alpha([a, b')) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha([c_{i_k}', d_{i_k})) < \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha([c_{i_k}, d_{i_k})) + \frac{\varepsilon}{2^{i*k}} \right) < \sum_{k=1}^{n} \alpha([c_{i_k}, d_{i_k})) + \varepsilon.$$

Ezzel megmutattuk, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\alpha([a, b)) < \sum_{k=1}^{n} \alpha([c_{i_k}, d_{i_k})) + 2\varepsilon,$$

és kész.

5.7. következmény. *Az α additív és relatív külső mérték, G σ-véges, és a $\mathcal{A}$ által generált σ-algebra $\mathcal{B}(G)$, ezért a mértékkiterjesztési tétel szerint α egyértelműen kiterjeszthető Borel-mértékké G-n.*

5.8. definíció. *A φ_α külső mértéket az F megváltozásából származó Lebesgue-Stieltjes külső mértéknek hívjuk. A φ_α szerint mérhető halmazokra megszorítva ez az (F megváltozásából származó) Lebesgue-Stieltjes mérték.*

5.2. Lebesgue-Stieltjes mértékek véges dimenzióban

Az 1-dimenziós eszközök részben átvihetők magasabb dimenzióba, de a $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt halmaz alakjától függően nem biztos, hogy van együttes eloszlásfüggvény. Inkább csak veszünk egy véges, additív téglafüggvényt.

$\mathcal{A}$ az olyan félig nyílt téglákból áll, amelyeknek a lezártja is G-ben van, $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ additív.

5.9. definíció. *Folytonossági hipersík*

5.10. lemma. *Megszámlálható sok kivétellel minden, a tengelyekkel párhuzamos hipersík folytonossági hipersík.*

Innen minden ugyanúgy megy, mint 1-dimenzióban...

5.3. A Lebesgue-Stieltjes mértékek regularitási tulajdonságai

5.11. definíció. *Az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér teljes, ha minden nullmértékű halmaz minden része mérhető.*

5.12. lemma. *Minden mértéktér kiegészíthető teljessé, és az a bővebb teljes mértékterek között egyértelműen létezik egy minimális:* $\mathcal{M}^* = \{A \cup N : \ A \in \mathcal{M}, \ \exists M \supset N \ \mu(M) = 0.\}$

5.13. tétel.

1. Ha K kompakt, akkor $\mu(K) < \infty$ (lok. végesség)

2. A mérhető halmazok rendszere $\mathcal{B}^*$

3a. Ha H mérhető, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz vannak olyan $N \supset H$ nyílt és $K \subset H$ kompakt halmazok, amelyekre $\mu(N \setminus K) < \varepsilon$. (Ez nem ugyanaz, mint $\mu(N) < \mu(H) + \varepsilon$ és $\mu(K) > \mu(H) - \varepsilon$!!!)

3b. Ha H mérhető, akkor $\mu(H) = \sup\{\mu(K) : K \subset H \text{ kompakt}\} = \inf\{\mu(N) : N \supset H \text{ nyílt}\}$.

4. Ha mérhető, akkor léteznek olyan $A \in \mathcal{F}_\sigma$ és $B \in \mathcal{G}_\delta$ halmazok, hogy $A \subset H \subset B$ és $\mu(H \subset A) = \mu(B \subset H) = \mu(B \subset A) = 0$.

5.14. lemma. *A Lebesgue-Stieltjes, speciálisan a Lebesgue-mérhető halmazok közel vannak szép Borel-halmazokhoz: ha $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető, és $\lambda(A) < \infty$, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan B halmaz, ami véges sok, racionális végpontú intervallum diszjunkt uniója, és $\lambda(A \triangle B) < \varepsilon$.*

5.15. mese. *Lehetne a mérhető halmazok között egyfajta félmetrikát csinálni: az A és B halmazok távolsága $\lambda(A \triangle B)$.*